$A(z)$-SUBGARMONIK FUNKSIYALARNING XOSSALARI

Authors: Eshmirzaeva Gulnoza Maxmud qizi, Qarshi xalqaro universiteti laboranti

Email: eshmirzayevagulnoza@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada garmonik funksiyalar, o`rta qiymat haqidagi teorema, subgarmonik funksiyalar, Xarnak teoremasi, maksimum prinsipi, subgarmonik funksiyalarning yaqinlashishi va eng muhimi $A(z)$-subgarmonik funksiyaning berilish usullari, $A(z)$-subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari keltirilgan.

Kalit so‘zlar: garmonik funksiyalar, subgarmonik funksiyalar, Xarnak teoremasi, maksimum prinsipi, $A(z)$-subgarmonik funksiyalar, $A(z)$-subgarmonik funksiyalar.

Garmonik funktsiyalar nazariyasi klassik analizning eng muhim bo’limlaridan biridir. Garmonik funksiyalar nafaqat ko'plab matematik tadqiqotlarda, balki tahlilni fizika va mexanikaga qo'llashda ham muhim o'rin tutadi, ular turli statsionar jarayonlarni tavsiflash imkonini beradi.

Garmonik funksiyalar nazariyasini $A(z)$ garmonik funksiyalar sinfiga kiritishning boshlang‘ich nuqtasi quyidagi asosiy teorema hisoblanadi.

Teorema 1. $A(z)$-analitik funksiyaning haqiqiy qismi $f \in O_A(D)$ D sohasidagi tenglamani qanoatlantiradi.

$$\Delta_A u := \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 2\bar{A}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right]\right] = 0 \qquad (1)$$

Va aksincha, agar D oddiy bog'langan soha bo'lsa va $u \in C^2(D), u: D \to R$ ikki marta differentsiallanuvchi funktsiya (2.1) differensial tenglamani qanoatlantirsa, u holda $f \in O_A(G): u = \operatorname{Re} f$ mavjud.

Ta`rif 1. Agar ikki marta differentsiallanuvchi $u \in C^2(D), u: D \to R$ funktsiya D da hamma joyda (2.1) differensial tenglamani qanoatlantirsa, unda bu funksiya D sohada A(z) garmonik funksiya deyiladi.

D sohadagi A(z) garmonik funksiyalar sinfi $h_A(D)$ ko'rinishda belgilanadi.

Teorema 2. (Xarnak). Garmonik funksiyalarning monoton ketma-ketligi $u_j \in h(D)$ tekis (D ichida) ∞ ga yaqinlashadi yoki qandaydir garmonik funksiyaga tekis yaqinlashadi.

haqiqiy tekislikda $R^2 \approx C$ garmonik funktsiyalar golomorf funksiyalar bilan chambarchas bog'liq. Haqiqiy shaklda Laplas operatori $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ ko'rinishga ega, bu erda $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z, \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Bu shuni anglatadiki, golomorf funktsiya $f \in O(D)$ uchun $\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2}, \operatorname{Re} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}$ tengliklardan $\Delta \operatorname{Re} f = 0, \Delta \operatorname{Im} f = 0$ tenglikni olamiz. Demak, golomorf funksiya f uchun uning haqiqiy va mavxum qismlari garmonik funksiyalardir. Aksincha, agar u D da garmonik bo'lsa, har qanday nuqta $z_0 \in D$ va uning $U(z_0, r) \subset D$ atrofida uchun unda $f(z) \in O(D), \operatorname{Re} f(z) = u(z), z \in U(z_0, r)$ golomorf funksiya mavjud bo'ladi.

Kompleks tekislikda biror $D \subset C$ sohada $u: D \to [-\infty; \infty)$ funksiya berilgan bo'lsin.

Ta`rif 2. Qaralayotgan u(z) funksiya quyidagi ikkita shartni qanoatlantirsa, u(z) funksiya D da subgarmonik funksiya deyiladi:

u(z) yuqori yarim uzluksiz, ya'ni, $\forall z_0 \in D$ da quyidagi tengsizlik:

Har bir nuqta $z_0 \in D$ uchun $r(z_0) > 0$ raqam mavjud bo'lib, barcha $r \le r(z_0)$ uchun quyidqgi tengsizlik o'rinli:

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} u(z)ds. \quad (2)$$

Haqiqatdan ham (2) tengsizlik har qanday $r : S(z_0, r) := \{z \in C : |z - z_0| = r\} \subset\subset D$ uchun amal qiladi. D sohasidagi barcha subgarmonik funksiyalar to'plami sh(D) bilan belgilanadi. Subgarmonik funksiyalarning quyidagi xossalari mavjud:

subgarmonik funksiyalarning manfiy bo'lmagan koeffitsientlar bilan chiziqli kombinatsiyasi subgarmonik funktsiyadir, ya'ni

$$u_k(z) \in sh(D), a_k \in R^+ (k = 1,...,m) \Rightarrow u(z) := a_1 u_1(z) + ... + a_m u_m(z) \in sh(D);$$

subgarmonik funksiyalarning cheklangan sonining maksimali ham subgarmonikdir, ya'ni

subgarmonik funksiyalarning monoton ravishda kamayib borayotgan ketma-ketligining chegarasida subgarmonikdir, ya'ni

subgarmonik funksiyalarning bir xil konvergent ketma-ketligi subgarmonik funksiyaga yaqinlashadi, ya'ni

Endi $A(z)$ subgarmonik funksiyalarning sinfi va uning potensial xususiyatlarini qaraymiz.

Ta`rif 3. Agar $u : D \to [-\infty; \infty)$ funksiya $G \subset C$ qavariq sohada quyidagi ikkita shartni qanoatlantirsa, u holda u(z) funksiya $A(z)$ subgarmonik funksiya deyiladi:

u(z) yuqori yarim uzluksiz $\forall z_o \in G$ da , ya'ni tengsizlik

$$\overline{\lim_{w \to z_0}} u(w) \le u(z_0) \quad (3)$$

(Demak, G to`plamning har qanday kompakt qism to`plamida funksiya yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi);

$\forall z_0 \in G$ nuqlatal uchun shunday $r(z_0) > 0$ son borki, barcha $r < r(z_0)$ lar uchun quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi r} \oint_{|\psi(\xi, z_0)|=r} u(\xi)\left|d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}\right|. (4)$$

bu yerda $\psi(\xi, z_0) = \xi - z_0 + \int_{\gamma(\xi, z_0)} \overline{A}(\tau)d\tau$ qavariq soha uchun $G \subset C$ mavjud va z_0 nuqtada yagona nolga ega.

Funktsiya $u : D \to [-\infty; \infty)$ har qanday qavariq sohada $G \subset D$ $A(z)$) subgarmonik bo'lsa, ixtiyoriy D sohasida $A(z)$ subgarmonik bo`ladi.

D sohasidagi subgarmonik funksiyalar sinfi $sh_A(D)$ bilan belgilanadi.

$A(z)$ -subgarmonik funksiyalarning oddiy xossalarini keltiramiz. Navbatdagi 4 ta xossa bevosita ta'rifdan kelib chiqadi.

$A(z)$ subgarmonik funksiyalarning manfiy bo‘lmagan koeffitsientli chiziqli sistemasi $A(z)$ subgarmonik funksiya hisoblanadi:

subgarmonik funksiyalarning chekli sondagi $A(z)$ ning maksimali ham $A(z)$ subgarmonikdir:

$A(z)$ -subgarmonik funksiyalarning $A(z)$ monoton kamayib borayotgan ketma-ketligi ham subgarmonikdir:

Subgarmonik funksiyalarning tekis yaqinlashuvchi $A(z)$ ketma-ketligi subgarmonik funksiyaga yaqinlashadi:

(Maksimum prinsipi). $u \in sh_A(D)$ va shunday bir $z_0 \in D$ nuqtada maksimalga erishsa, u holda $u|_D = const$.

Isbot. $\exists z_0 \in D : u(z_0) = \sup_{z \in D}\{u(z)\}$ bo`lsin. $M := \{z \in D : u(z) = u(z_0)\}$ to`plamni qaraylik. U holda $z_0 \in M$ va u(z) D da yarim uzluksiz bo`lgani uchun M to`plam D da yopiq bo`ladi. Ixtiyoriy fikserlangan $w \in M$ uchun $A(z)$ -subgarmonik funksiya ta’rifidan biz

Bundan kelib chiqadiki $u\big|_{\partial L(w,r)} \equiv u(z_0)$, agar $\exists \xi \in \partial L(p,r) : u(\xi) < u(z_0)$ uchun, keyin yarim uzluksizlikdan $u(z) < u(z_0)$ bazi bo`sh bo`lmagan qism $\lambda \subset \partial L(w,r)$ to`plamlaridan , $u(w) = u(z_0)$ tenglik o`rinli bo`lmaydi. Shunday qilib $u\big|_{\partial L(w,r)} \equiv u(z_0), \forall 0 < r \le r(z^0)$ va $u\big|_{L(w,r)} \equiv u(z_0)$. Bu yerdan, $w \in M$ ichki nuqta, M esa D da ochiq to'plamdir. Shunday qilib M=D. 5-xossa isbotlandi.

agar $v \in sh_A(D), u \in h_A(D)$, funksiyalar uchun ularning $G \subset\subset D$ chegaraviy nuqtalari tengsizlikni $v\big|_{\partial G} \le u\big|_{\partial G}$ qanoatlantirsa, $v\big|_G \le u\big|_G$ tengsizlik o`rinli bo`ladi.

Isboti maksimum prinsipidan kelib chiqadi.

agar ∂D chegarada uzluksiz $\varphi \in C(\partial D)$ funksiya berilgan bo‘lsa, u holda $U = \{v \in sh_A(D) \cap C(D) : u\big|_{\partial D} \equiv \varphi\}$ sinfda $A(z)$-garmonik funksiya $u : u\big|_{\partial D} \equiv \varphi$ maksimal shartni qanoatlantiradi, ya’ni $u(z) \ge v(z), \forall z \in D, \forall v \in U$.

$A(z)$ uchun subgarmonik funktsiya $v \in sh_A(D)$, bu erda $D \subset C$ qavariq soha bo'lsa, dastlab yetarlicha kichik $r < r(z_0)$ uchun zarur bo'lgan ikkinchi shart (4) hamma $r : L(z_0, r) \subset\subset D$ uchun qanoatlantiriladi

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

Ahlfors L. Lectures on quasiconformal mappings, Toronto-New York London, 1966, –133 pp.

Sadullaev A., Jabborov N.M. On a class of A-analitic functions // Siberian Federal University, Maths&Physics, 2016, Vol. 9(3), pp. 374-383.

Zhabborov N.M. Morer’s theorem and functional series in the class of *A*-analytic functions // Siberian Federal University, Maths&Physics, 2018, vol. 11(1), pp. 50-59.

Абдуллаев Б., Садуллаев А., Теория потенциалов в классе m-субгармонических функций. // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, Москва, 2012, № 279, ст. 166–192.

Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, Монография, 2012, 212 с.

Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Аналог интегральной формулы Коши для A(z)-аналитических функций // Узбекский математический журнал, 2016, №4, ст. 50-59.

Садуллаев А., Мадрахимов Р., Гладкость субгармонических функций // Матем. сб., 1990, том. 181:2, ст. 167-182.

Бекмуродов Беҳзод Бахтиёр ўғли. Гармоник функциянинг хоссалари. WARSAW, POLAND Wydawnictwo Naukowe "iScience" 2022