MUSBAT ANIQLANGAN KVADRATIK FORMALAR

Ruziboyeva Oqila Shonazar qizi

Qarshi davlat universiteti o‘qituvchisi

Email: oqilaruziboyeva2905@gmail.com

Telefon raqam: +998(77) 392-39-39

Eshmuhammedova Jayrona Ulmas qizi
Qarshi davlat universiteti
Matematika va kompyuter ilmlari fakulteti
Matematika yo‘nalishi 3-kurs 023-38-guruh talabasi
Email: jayronaeshmuhammedova@gmail.com
Telefon raqam: +998(97) 312-01-06

Annotatsiya. Ushbu maqolada bichiziqli va kvadratik formalar tushunchasi, ularning asosiy xossalari hamda matritsaviy ifodalanishi yoritilgan. Bichiziqli formalarning simmetrik holi, kvadratik formalarning aniqlanishi va ularning kanonik shaklga keltirilishi masalalari batafsil tahlil qilingan. Shuningdek, kvadratik formalarni diagonal ko‘rinishga keltirishning Lagranj usuli ko‘rib chiqilib, tegishli teorema va isbotlar bayon etilgan.

Kalit so‘zlar: Bichiziqli forma, simmetrik bichiziqli forma, kvadratik forma, matritsa, bazis, kanonik shakl, Lagranj usuli, chiziqli algebra, vektor fazo, musbat aniqlangan forma.

Annotation. This article discusses the concepts of bilinear and quadratic forms, their main properties, and their matrix representations. The symmetric case of bilinear forms, the definition of quadratic forms, and the problem of reducing them to canonical form are analyzed in detail. In addition, the Lagrange method for transforming quadratic forms into diagonal form is considered, and the corresponding theorems and proofs are presented.

Keywords: Bilinear form, symmetric bilinear form, quadratic form, matrix, basis, canonical form, Lagrange method, linear algebra, vector space, positive definite form.

Аннотация. В данной статье рассматриваются понятия билинейных и квадратичных форм, их основные свойства и матричное представление. Подробно анализируются симметрические билинейные формы, определение квадратичных форм и вопросы приведения их к каноническому виду. Кроме того, рассмотрен метод Лагранжа приведения квадратичных форм к диагональному виду, а также приведены соответствующие теоремы и доказательства.

Ключевые слова: билинейная форма, симметрическая билинейная форма, квадратичная форма, матрица, базис, канонический вид, метод Лагранжа, линейная алгебра, векторное пространство, положительно определённая форма.

Kirish

Chiziqli algebra va funksional analiz fanlarida bichiziqli hamda kvadratik formalar muhim o‘rin egallaydi. Ushbu tushunchalar vektor fazolarining geometrik va algebraik xossalarini o‘rganishda keng qo‘llaniladi. Ayniqsa, kvadratik formalar yordamida fazodagi masofa, uzunlik, ortogonallik kabi tushunchalarni ifodalash mumkin. Bichiziqli formalar esa ko‘plab matematik va amaliy masalalarda, jumladan differensial tenglamalar, optimallashtirish va fizika modellarida qo‘llanadi.

Mazkur maqolada bichiziqli formaning ta’rifi, uning matritsaviy ko‘rinishi va bazis almashgandagi o‘zgarishi o‘rganiladi. Shuningdek, simmetrik bichiziqli formalar orqali kvadratik formalarning hosil qilinishi hamda ularni kanonik shaklga keltirish usullari yoritiladi. Kvadratik formalarni diagonal ko‘rinishga olib kelishning Lagranj usuli nazariy jihatdan asoslab beriladi.

Endi bichiziqli va kvadratik funksiyalar (formalar) tushunchalarini kiritamiz. Bu tushunchani dastlab, haqiqiy sonlar maydonida aniqlangan vektor fazo uchun kiritamiz.

1-ta’rif. *agar* $V \times V$ *to’plamni* $\mathbb{R}$ *maydonga o’tkazuvchi* $A: V \times V \to \mathbb{R}$ *akslantirish aniqlangan bo‘lib, quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa,*

1) $A(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda A(x_1, y) + \mu A(x_2, y)$;

2) $A(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda A(x, y_1) + \mu A(x, y_2)$

ya’ni, bitta o‘zgaruvchining tayinlangan qiymatida ikkinchi o‘zgaruvchiga nisbatan chiziqli funksiya bo‘lsa, u holda $A(x, y)$ *bichiziqli forma deb ataladi.*

Misol. V chiziqli fazo sifatida uzliksiz funksiyalar to‘plamini qaraylik. $K(s,t)$ funksiya ikki o‘zgaruvchi uzluksiz funksiya bo‘lsin. Agar

$$A(f,g) = \int_a^b \int_a^b K(s,t) f(s) g(t) ds dt$$

bo’lsa, $A(f,g)$ funksiya V fazoda aniqlangan bichiziqli forma bo’ladi.

2-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* x, y *vektorlar uchun*

$$A(x,y) = A(y,x)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, bichiziqli forma simmetrik ***bichiziqli forma*** *deyiladi.*

3-ta’rif. Agar ixtiyoriy x , y vektorlar uchun

$$A(x,y) = A(y,x)$$

Tenglik o’rinli bo’lsa, bichiziqli forma simmetrik biziqchi forma deyiladi.

Yevklid fazosidagi (x,y) skalyar ko’paytma simmetrik bichiziqli formaga misol bo‘ladi.

Bichiziqli formaning matritsasi. Biz bichiziqli formaning aksiomatik ta’rifini berdik. Endi n o’lchamli fazoda biror $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis tanlab olamiz,

hamda $A(x,y)$ bichiziqli formani x va y vektorlarning bu bazisdagi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ va $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ koordinatalari orqali ifodalaymiz. Bu holda:

$$A(x,y) = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \cdots + \eta_n e_n).$$

Bichiziqli formaning xossalariga asosan:

$$A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \cdots + \eta_n e_n) =$$
$$+\xi_1\eta_1 A(e_1,e_1) + \xi_1\eta_2 A(e_1,e_2) + \cdots + \xi_1\eta_n A(e_1,e_n) +$$
$$+\xi_2\eta_1 A(e_2,e_1) + \xi_2\eta_2 A(e_2,e_2) + \cdots + \xi_2\eta_n A(e_2,e_n) +$$
…..………………………………………………………........
$$+\xi_n\eta_1 A(e_n,e_1) + \xi_n\eta_2 A(e_n,e_2) + \cdots + \xi_n\eta_n A(e_n,e_n).$$

yoki qisqacha:

$$A(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} A(e_i,e_j)\,\xi_i\eta_j.$$

$A(e_i,e_j)$ o‘zgarmaslarni $a_{i,j}$ kabi belgilasak, n o‘lchamli fazodagi xar qanday bichiziqli forma berilgan $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisda

$$A(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\eta_j$$

ko‘rinishida yozilishini hosil qilamiz, bu yerda $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ va $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ sonlar mos ravishda x va y vektorlarning shu bazisdagi koordinatalari.

Ma’lumki, $a_{i,j}$ sonlar bazisning tanlab olinishigagina bog‘liq bo‘lib,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n.2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

matritsa $A(x,y)$ bichiziqli formaning $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisdagi matritsasi deyiladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy $A(x,y)$ bichiziqli forma berilgan bazisda $A = (a_{i,j})$ matritsa bilan aniqlanadi.

Endi bazis o‘zgarganda bichiziqli forma matritsasining o‘zgarishini ko‘rib chiqamiz. Bizga n o‘lchamli fazoda ikkita $e_1, e_2, \ldots, e_n$ va $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bazislar berilgan bo‘lsin. $A(x,y)$ bichiziqli formaning $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisdagi matritsasini $A = (a_{i,j})$ va $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bazisdagi matritsasi esa $B = (b_{i,j})$ kabi belgilaylik. Bundan tashqari, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisdan $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bazisga o‘tish matritsasi

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n,1} & c_{n.2} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

bo‘lsin, ya’ni

$$\begin{cases} f_1 = c_{1,1}e_1 + c_{2,1}e_2 + \cdots + c_{n,1}e_n, \\ f_1 = c_{1,2}e_1 + c_{2,2}e_2 + \cdots + c_{n,2}e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n = c_{1,n}e_1 + c_{2,n}e_2 + \cdots + c_{n,n}e_n, \end{cases}$$

Teorema. Agar A va B matritsalar $A(x,y)$ bichiziqli formaning mos ravishda $e_1, e_2, \dots, e_n$ va $f_1, f_2, \dots, f_n$ bazislardagi matritsalari bo‘lib, $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdan $f_1, f_2, \dots, f_n$ bazisga o‘tish matritsasi C bo’lsa, u holda

$$B = C^T AC$$

bo‘ladi, bu yerda, C^T matritsa C matritsaning transponirlangan matritsasi.

Isbot. Ta’rifga ko’ra $b_{i,j} = A(f_i, f_j)$ ekanligi ma’lum. Endi

$$f_i = c_{1,i}e_1 + c_{2,i}e_2 + \cdots + c_{n,i}e_n,$$

$$f_j = c_{1,j}e_1 + c_{2,j}e_2 + \cdots + c_{n,j}e_n$$

tenglikdan foydalanib,

$$b_{i,j} = A(f_i, f_j) = A\left(\sum_{p=1}^{n} c_{p,i}, e_p, \sum_{p=1}^{n} c_{q,i}, e_q\right) =$$

$$\sum_{p,q=1}^{n} c_{p,i}, c_{q,j} A(e_p, e_q) = \sum_{p,q=1}^{n} c_{p,i}, e_{q,j} a_{p,q}$$

formulani hosil qilamiz.

Bu tenglikni matritsa shaklida yozish uchun $c'_{i,p} = c_{p,i}$ deb delgilash kiritamiz. Natijada, $c'_{i,p}$ lar C^T matritsaning elementlaridan iborat bo‘ladi. Demak,

$$b_{i,j} = \sum_{p,q=1}^{n} c'_{i,p} a_{p,q} c_{q,j}.$$

Matritsa shaklida esa, bu tenglik $B = C^T AC$ ko’rinishiga keladi.

Endi biz kavdratik forma ta’rifini keltiramiz. Bizga $A(x,y)$ simmetrik bichiziqli forma berilgan bo’lsin.

3-ta’rif. *Simmetrik bichiziqli formada $y = x$ deb olganda hosil bo’ladigan $A(x,x)$ funksiyaga kvadratik forma deyiladi.*

$A(x,y)$ simmetrik biziqli forma $A(x,x)$ kvadratik formaga nisbatan qutbiy bichiziqli forma deyiladi.

Teorema. $A(x,y)$ qutbiy forma o‘zining $A(x,x)$ kvadratik formasi bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Isbot. Bichiziqli forma ta’rifidan osongina ko‘rish mumkinki,

$$A(x+y,x+y)=A(x,x)+A(x,y)+A(y,x)+A(y,y).$$

$A(x,y)=A(y,x)$ ekanligidan

$$A(x,y)=\frac{1}{2}[A(x+y,x+y)-A(x,x)-A(y,y)]$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikning o‘ng tomonida faqat kvadratik formaning qiymatlari ishtirok etganligi uchun, $A(x,y)$ bichiziqli forma o‘zining kvadratik formasi bilan aniqlanishi kelib chiqadi.

Yuqorida biz ixtiyoriy $A(x,y)$ bichiziqli forma x va y vektorlarning koordinatalari orqali

$$A(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}\xi_i\eta_j$$

ko‘rinishda yozilishini ko‘rsatgan edik. Demak, $A(x,x)$ kvadratik forma ham berilgan bazisda

$$A(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k$$

formula bilan ifodalanadi, bunda $a_{i,k}=a_{k,i}$.

4-ta’rif. *Agar har qanday $x\neq 0$ vektor uchun $A(x,x)>0$ bo’lsa, $A(x,x)$ kavadratik forma musbat aniqlangan forma deyiladi.*

5-ta’rif. *Agar $V\times V$ to’plam $\mathbb{C}$ maydonga o‘tkazuvchi $A:V\times V\to\mathbb{C}$ akslantirish aniqlangan bo‘lib, $A(x,y)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa,*

1) $A(\lambda x_1+\mu x_2,y)=\lambda A(x_1,y)+\mu A(x_2,y)$;

2) $A(x,\lambda y_1+\mu y_2)=\bar{\lambda}A(x,y_1)+\bar{\mu}A(x,y_2)$,

u holda $A(x,y)$ funksiya ***bichiziqli forma*** *deb ataladi.*

Endi kvadratik formaning kanonik shaklini ko’rib chiqamiz. $A(x,x)$ kvadratik formaning aniqlanishi x vektorning berilgan bazisdagi koordinatalariga bog‘liq ekanligini keltirib o‘tdik. Bu mavzuda kvadratik formani kvadratlar yig‘indisi shakliga keltirish, ya’ni kvadratik formani

$$A(x,x)=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\cdots+\lambda_n\xi_n^2$$

ko‘rinishga keltiradigan bazisni topish masalasini qaraymiz.

6-ta’rif. *Kvadratik formaning $A(x,x)=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\cdots+\lambda_n\xi_n^2$ ko‘rinishidagi shakli uning kanonik (normal) shakli deb ataladi.*

Teorema. n o’lchamli V fazoda berilgan ixtiyoriy $A(x,x)$ kvadratik forma uchun shunday $e_1,e_2,\dots,e_n$ bazis mavjudki, bu bazisda kvadratik forma

$$A(x,x)=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\cdots+\lambda_n\xi_n^2$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, $A(x,x)$ kvadratik forma biror $f_1,f_2,\dots,f_n$ bazisda quyidagi

$$A(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\eta_i\eta_j$$

ko‘rinishga ega bo‘lsin. Bunda $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ lar x vektorning ushbu bazisdagi koordinatalari.

Bazisni

$$A(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\eta_i\eta_j$$

formulada turli indeksli koordinatalarning ko‘paytmalari yo‘qolib boradigan qilib almashtiramiz. Bazisning xar bir almashtirilishiga ma’lum koordinatalarning xosmas almashtirilishi, va aksincha, koordinatalarning xosmas almashtirilishiga ma'lum bazis almashtirishlari to‘g‘ri kelgani uchun koordinatalarni almashtirish formulalarini yozish bilan chegaralanamiz.

$A(x,x)$ kvadratik formani kanonik shaklga keltirish uchun, bizga $a_{i,j}$ koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lishi kerak. Bunga hamma vaqt erishish mumkin. Haqiqatan ham, nolga aynan teng bo‘lmagan $A(x,x)$ kvadratik formada o‘zgaruvchining birorta ham kvadrat bo‘lmasin deb faraz qilaylik, u holda kamida bitta noldan farqli ko‘paytma, masalan, $2a_{1,2}\eta_1\eta_2$ mavjud bo’ladi. η_1 va η_2 koordinatalarni

$$\eta_1 = \eta_1' + \eta_2', \eta_1 = \eta_1' - \eta_2'$$

kabi almashtirib, boshqa o‘zgaruvchilarni o‘zgartirishsiz qoldirsak, bunday almashtirishda $2a_{1,2}\eta_1\eta_2$ hadning ko’rinishi $2a_{1,2}(\eta_1'^2 - \eta_2'^2)$ bo‘lib qoladi. Farazga muvofiq, $a_{1,1} = a_{2,2} = 0$ bo‘lgani uchun, bu hech qanday had bilan qisqarmaydi, ya’ni $\eta_1'^2$ ning koeffitsienti noldan farqli bo‘ladi.

Demak, umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $A(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\eta_i\eta_j$ formulada $a_{1,1} \neq 0$ deb olish mumkin. Kvadratik formada η_1 qatnashgan hadlarni ajratib yozamiz:

$$a_{1,1}\eta_1^2 + 2a_{1,2}\eta_1\eta_2 + \cdots + 2a_{1,n}\eta_1\eta_n.$$

Bu yig‘indini to‘la kvadratgacha to‘ldiramiz, ya’ni uni

$$a_{1,1}\eta_1^2 + 2a_{1,2}\eta_1\eta_2 + \cdots + 2a_{1,n}\eta_1\eta_n = \frac{1}{a_{1,1}}\left(a_{1,1}\eta_1 + \cdots + a_{1,n}\eta_n\right)^2 - B$$

ko‘rinishda yozamiz, bu yerda B ifoda faqat $a_{1,2}\eta_2, \dots, a_{1,n}\eta_n$ hadlar kvadratlari va ularning ko‘paytmalarini o‘z ichiga olgan haddir.

$$a_{1,1}\eta_1^2 + 2a_{1,2}\eta_1\eta_2 + \cdots + 2a_{1,n}\eta_1\eta_n = \frac{1}{a_{1,1}}\left(a_{1,1}\eta_1 + \cdots + a_{1,n}\eta_n\right)^2 - B$$

Ifodani

$$A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}\eta_i\eta_j$$

tenglikga qo‘ygandan so‘ng qaralayotgan kvadratik forma

$$A(x,x)=\frac{1}{a_{1,1}}\left(a_{1,1}\eta_1+\cdots+a_{1,n}\eta_n\right)^2+\cdots$$

ko‘rinishga keladi, bunda yozilmagan hadlar $\eta_2=\eta_n$ o‘zgaruvchilardangina tashkil topgan. Quyidagicha o‘zgartirish kiritamiz

$$\eta_1^*=a_{1,1}\eta_1+\cdots+a_{1,n}\eta_n,$$

$$\eta_1^*=\eta_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta_n^*=\eta_n.$$

U holda kvadratik forma

$$A(x,x)=\frac{1}{a_{1,1}}\eta_1^{*2}+\sum_{i,j=2}^{n}a_{i,j}^*\,\eta_i^*\eta_j^*$$

ko‘rinishiga keladi.

$\sum_{i,j=2}^{n}a_{i,j}^*\,\eta_i^*\eta_j^*$ ifoda $A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}\eta_i\eta_j$ formulaning o‘ng tomoniga juda o‘xshash bo‘lib, bunda faqat birinchi koordinata ishtirok etmaydi. $a_{2,2}^*$ koeffitsientni noldan farqli deb faraz qilib, o‘zgaruvchilarni yuqoridagi usulda,

$$\eta_1^{**}=\eta_1^*,$$

$$\eta_2^{**}=a_{2,2}^*\eta_2^*+a_{2,3}^*\eta_3^*+\cdots+a_{2,n}^*\eta_n^*,$$

$$\eta_n^{**}=\eta_n^*,$$

formulalarga muvofiq yangidan almashtirishimiz mumkin.

Bunday almashtirishdan so‘ng kvadratik forma

$$A(x,x)=\frac{1}{a_{1,1}}\eta_1^{**2}+\frac{1}{a_{2,2}}\eta_2^{**2}+\sum_{i,j=3}^{n}a_{i,j}^{**}\,\eta_i^{**}\eta_j^{**}$$

ko‘rinishga keladi. Bu jarayonni davom ettirib, o‘zgaruvchilarni bir necha bor almashtirgandan keyin $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ o‘zgaruvchilarga ega bo‘lamiz. Ya’ni, $A(x,x)$ kvadratik forma bu o‘zgaruvchilar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$A(x,x)=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\cdots+\lambda_m\xi_{m,}^2$$

bu yerda $m\le n$.

Ravshanki, $m < n$ bo‘lgan holda $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ deb faraz qilish mumkin.

Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirishning yuqoridagi teorema isbotida bayon qilingan usuli Lagranj usuli deb ataladi.

XULOSA

Xulosa qilib aytganda, bichiziqli va kvadratik formalar chiziqli algebra kursining muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi. Ularning matritsaviy ifodasi va bazis almashtirishdagi xossalari nazariy hamda amaliy masalalarni yechishda katta ahamiyatga ega. Kvadratik formalarning kanonik shaklga keltirilishi esa ularni sodda va qulay ko‘rinishda tahlil qilish imkonini beradi. Lagranj usuli yordamida har qanday kvadratik formani diagonal ko‘rinishga olib kelish mumkinligi isbotlandi. Ushbu natijalar matematik analiz, geometriya va fizikaning turli bo‘limlarida keng qo‘llanilish imkoniyatiga ega.

FOYDALANILGAN ADABIYOT

1. Xudoyberdiyev X., Haydarov F.H. *Algebra va sonlar nazariyasi: o‘quv qo‘llanma*. – T.: Tafakkur-bo‘stoni, 2019.
2. **Xudayarov B.A.** *Matematika (chiziqli algebra va analitik geometriya)*. – T.: [nashriyot nomi], 2018.