MASALALARNI VEKTORLAR YORDAMIDA VA KOORDINATALAR SISTEMASINI KIRITISH USULLARIDA YECHISH METODIKASI

Ruziboyeva Oqila Shonazar qizi
Qarshi davlat universiteti o‘qituvchisi
e-mail: oqilaruziboyeva2905@gmail.com +998773923939
Qarshi davlat universiteti talabalari
Xurramova Zamira Abdirahmat qizi
e-mail: xurramova96zamira@gmail.com
Tirkashova Dilshoda Dilmurod qizi
e-mail: dilshodatirkashova05@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada geometriya, fizika va mexanika kurslarida uchraydigan masalalarni vektorlar yordamida hamda koordinatalar sistemasini kiritish usulida yechish metodikasi ko'rib chiqiladi. Vektorli usulning mohiyati, uning koordinatali usul bilan o'zaro aloqasi va o'quv jarayonida qo'llanilishi tahlil etiladi. Turli turdagi masalalar misolida har ikkala usulning qiyosiy samaradorligi ko'rsatiladi. Maqola talabalar va o'qituvchilar uchun amaliy qo'llanma bo'lib xizmat qilishi mumkin.

Kalit so'zlar: vektor, koordinatalar sistemasi, skalyar ko'paytma, vektorli ko'paytma, geometrik masala, analitik metod, metodika.

Аннотация: В данной статье рассматривается методика решения задач, встречающихся в курсах геометрии, физики и механики, с помощью векторов, а также метода введения системы координат. Анализируется сущность векторного метода, его взаимосвязь с координатным методом и применение в учебном процессе. На примере задач различных типов показывается сравнительная эффективность обоих методов. Статья может служить практическим пособием для студентов и преподавателей.

***Ключевые слова*:** вектор, система координат, скалярное произведение, векторное произведение, геометрическая задача, аналитический метод, методика

Abstract : This article examines the methodology of solving problems in geometry, physics, and mechanics using vectors and the method of introducing a coordinate system. The essence of the vector method, its relationship with the coordinate method, and their application in the educational process are analyzed. The comparative effectiveness of both methods is demonstrated on examples of various types of problems. The article can serve as a practical guide for students and teachers.

Keywords: vector, coordinate system, scalar product, cross product, geometric problem, analytic method, methodology.

Zamonaviy matematika ta'limida masalalar yechishning samarali metodlarini o'rgatish alohida ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa, geometriya va fizika kurslarida vektorlar nazariyasini va koordinatalar sistemasini qo'llash ko'nikmasi talabalar uchun zaruriy malakalardan biriga aylangan. Biroq amaliyot shuni ko'rsatadiki, ko'plab talabalar bu ikki usulning bir-biridan farqini aniq tushunmaydi hamda qaysi holatda qaysi metoddan foydalanish maqsadga muvofiqligini bilmaydi. Shu muammodan kelib chiqib, ushbu maqolada vektorlar yordamida va koordinatalar sistemasini kiritish orqali masala yechishning metodologik asoslari chuqurroq ko'rib chiqiladi.

Vektorli hisob XIX asrda Irlandiyalik matematik Uilyam Rouan Xemilton va nemis olimi Hermann Grassman tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, keyinchalik fizika, mexanika va geometriya sohalarida keng qo'llanilishga ega bo'ldi. O'zbekiston maktablarida vektorlar bo'yicha ta'lim 7-sinfdan boshlanadi, oliy ta'lim muassasalarida esa bu mavzu ancha chuqurroq o'rganiladi. Koordinatali metod esa Rene Dekart tomonidan taklif etilgan bo'lib, uni ba'zan «analitik geometriya metodi» deb ham atashadi. Ushbu metod geometrik ob'ektlarni algebraik tenglamalar va

munosabatlar tili orqali ifodalash imkonini beradi, bu esa keng sinf masalalarni muvofiqlashtirilgan va tizimli tarzda yechish imkoniyatini yaratadi.

Vektorli usulning mohiyati shundaki, masaladagi geometrik munosabatlar bevosita vektorli ifodalar orqali yoziladi va kerakli natija algebraik transformatsiyalar yordamida olinadi. Bu usul, ayniqsa, ko'p o'lchovli fazolarda ishlashda, masofalar va burchaklar bilan bog'liq munosabatlarda katta qulaylik yaratadi. Masalan, uchburchakning medianalari kesishish nuqtasini topishda vektorli yondashuv koordinatali yondashuvga nisbatan ancha ixcham yechimga olib keladi. Skalyar ko'paytma formulasi $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$ yordamida ikki vektorlar orasidagi burchakni topish, vektorli ko'paytma esa fazoda tekisliklarning normal vektorlarini aniqlashda ishlatiladi.

Koordinatalar sistemasini kiritish usulida esa avvalo masalaning shartiga mos ravishda qulay koordinatalar sistemasi tanlanadi, so'ngra barcha geometric ob'ektlar raqamli koordinatalar orqali ifodalanib, masala algebraik tizimga aylantiriladi. Bu usulning asosiy afzalligi shundaki, u standart protseduralardan foydalanishga imkon beradi va natijalarga aniq son qiymatlari shaklida erishiladi. Shu bilan birga, koordinatalar sistemasini to'g'ri tanlash masala yechimini sezilarli darajada soddalashtirishi yoki murakkablashtirishi mumkin. Masalan, aylana bilan bog'liq masalalarda markazni koordinata boshiga, to'g'ri to'rtburchak uchun esa burchaklarni o'q ustiga joylashtirish yechimni qisqartiradi.

Amaliy mashg'ulotlarda kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, ikkala usulni parallel o'rganish talabalarning matematik tafakkurini kengaytiradi. Vektorli usul tushunchaviy chuqurlikni ta'minlasa, koordinatali usul hisoblash ko'nikmalarini mustahkamlaydi. Misol tariqasida, uchburchakning og'irlik markazi masalasini ko'rib chiqamiz. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ uchburchakning og'irlik markazi G nuqtasini koordinatali usulda quyidagicha topish mumkin: $G = ((x_1+x_2+x_3)/3, (y_1+y_2+y_3)/3)$. Xuddi shu masalani vektorli usulda yechganda, O nuqtadan chizilgan radius-vektorlar orqali $\overrightarrow{OG} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})/3$ munosabati hosil qilinadi.

Natijalar bir xil, biroq ikkinchi yechim masalaning geometrik ma'nosini yanada ravshanroq ifodalaydi.

Pedagogik nuqtai nazardan, vektorli usulni o'rgatishda talabalar ko'pincha «qaerdan boshlayman» degan savolga javob topishda qiynaladilar. Shu sababli o'qituvchilar masalalar yechishda quyidagi algoritmdan foydalanishni tavsiya etadilar: birinchi bosqichda masala shartini diqqat bilan o'qib, qanday miqdorlarni topish kerakligini aniqlash; ikkinchi bosqichda asosiy nuqtalar tanlanib, vektorlar belgilanadi; uchinchi bosqichda ma'lum vektorli munosabatlar (parallellik, perpendikulyarlik, ko'paytmalar) yoziladi; to'rtinchi bosqichda hosil bo'lgan tenglamalar sistemasi yechiladi va natija tekshiriladi. Koordinatali usulda esa algoritmning ikkinchi bosqichi koordinatalar sistemasini tanlash va hamma nuqtalar koordinatalarini aniqlashdan iborat bo'ladi.

Ikkala usulni taqqoslaganda, ularning o'ziga xos kuchli tomonlari mavjud ekanligi ko'rinadi. Vektorlar yordamidagi yechim, odatda, ko'proq umumiy xarakterdagi bo'ladi va fazodagi uch o'lchovli holga osonlikcha ko'chirilishi mumkin. Koordinatali usul esa, ayniqsa, ko'paytma formulalari yoki trigonometrik tenglamalar ishlatilmasa, hisob-kitoblar jihatidan aniqroq va to'g'ridan-to'g'ri bo'ladi. Masalan, uchta nuqta kollinear (bir to'g'ri chiziqda yotadi) ekanligini tekshirishda vektorli usulda $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlari parallel ekanligini, ya'ni ularning vektorli ko'paytmasi nolga tengligini aniqlash yetarli: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$. Koordinatali usulda esa uchta nuqtaning koordinatalaridan tuzilgan determinant nolga teng bo'lishi tekshiriladi.

Fizika masalalarida, ayniqsa mexanika va elektrodinamikada, vektorli yondashuv muqarrar hisoblanadi. Kuchlarga, tezliklarga va maydon kuchlanganligiga tegishli ifodalar tabiatan vektorli miqdorlardir. Bu sohada koordinatalar sistemasini kiritish, asosan, hisob-kitoblarni aniq sanoqli natijalarga olib kelish uchun qo'llaniladi. Masalan, Kulon qonuniga ko'ra bir nechta zaryadlarning bitta nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlanishini topishda avval har bir kuchni vektorli yozing, keyin qulay koordinata o'qlari bo'yicha proeksiyalarga ajrating va

har bir o'q bo'yicha alohida yig'indini hisoblang. Yakuniy natijani esa ushbu proeksiyalardan Pifagor teoremasi orqali toping.

O'quv amaliyotida ikkala metodikani birlashtirgan mashg'ulotlar o'tkazish talabalarning masalalar yechishdagi moslashuvchanligini oshiradi. Dars rejasini tuzishda o'qituvchi avval mavzuni vektorli ko'rinishda tushuntirishi, so'ngra xuddi shu masalani koordinatali usulda ham yechib ko'rsatishi, nihoyat ikki usulning afzalliklari va kamchiliklarini tahlil qilishi maqsadga muvofiq bo'ladi. Bunday yondashuv talabalarning fikrlash uslubini boyitadi, ular muayyan masalaga eng samarali metodologiyani mustaqil tanlash ko'nikmalariga ega bo'ladilar. Shuningdek, masalalar yechish jarayonida grafikli va analitik tasvirlardan parallel foydalanish nazariy tushunchalarning mustahkamlanishiga hissa qo'shadi.

Tadqiqotlar shuni ham ko'rsatadiki, talabalar ko'pincha vektorli usul bilan koordinatali usulni aralashtiradilar. Bu o'rinda asosiy tushunmovchilik manbayi shuki, koordinatali usulda ham vektorlar ishlatilishi mumkin — lekin u yerda vektorlar alohida komponentlar (proeksiyalar) shaklida ifodalanadi. Sof vektorli usulda esa barcha munosabatlar komponentlarga ajratmasdan, vektorli operatsiyalar tili orqali yoziladi. Ushbu farqni o'qituvchilar o'quv jarayonida alohida ta'kidlashlari lozim. Misol sifatida, ikki vektorning skalyar ko'paytmasini hisoblashda $a \cdot b = a_x b_x + a_\gamma b_\gamma + a_zb_z$ formula koordinatali ko'rinish, $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$ esa sof vektorli ko'rinish hisoblanadi.

Yuqoridagi tahlillar asosida quyidagi xulosalar chiqarish mumkin. Birinchidan, vektorlar yordamida masala yechish va koordinatalar sistemasini kiritish usuli bir-birini to'ldiruvchi metodologiyalar bo'lib, ularni birgalikda o'rganish matematik ta'limning sifatini oshiradi. Ikkinchidan, o'qituvchilar har ikkala usulni tizimli ravishda o'quv jarayoniga tatbiq etishi va ularning qayerda afzallik berishini misollar orqali ko'rsatishi zarur. Uchinchidan, talabalar muayyan masalani ko'rib chiqishda avval masalaning geometrik tuzilishini tahlil qilishlari, so'ngra eng samarali usulni ongli ravishda tanlashlari kerak. Bunday yondashuv nafaqat

matematika va fizika fanlarini o'rganishda, balki muhandislik, informatika va boshqa aniq fanlar bo'yicha kasbiy faoliyatda ham muhim ahamiyat kasb etadi.

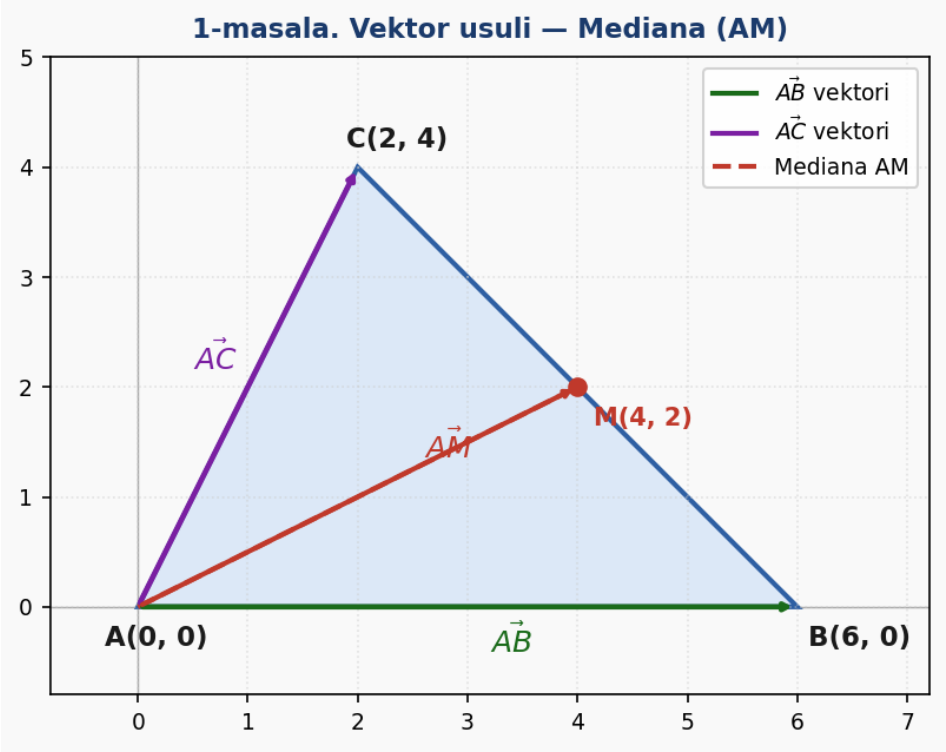
MASALALAR YECHISH NAMUNALARI

Quyida bir xil masalani ikki usulda — vektorlar yordamida va koordinatalar sistemasini kiritish orqali — yechish namunasi keltirilgan. Har ikkala yechimni taqqoslash ushbu metodlarning o'ziga xos xususiyatlarini yaqqol ko'rsatib beradi.

Masala sharti

A(0, 0), B(6, 0), C(2, 4) uchburchak berilgan. BC tomonining o'rta nuqtasi M dan A cho'qqisiga chizilgan mediana (AM kesma) uzunligini toping.

1-usul: Vektorlar yordamida yechish



1-rasm. ABC uchburchak va AM medianasi (vektor usuli)

Yechim. A nuqtadan B va C nuqtalarga radius-vektorlar kiritamiz. Koordinatalardan foydalanib vektorlarni yozamiz:

AB□ = B − A = (6−0, 0−0) = (6, 0)

AC□ = C − A = (2−0, 4−0) = (2, 4)

M nuqta — BC tomonining o'rta nuqtasi bo'lganligi sababli, AM vektorini quyidagi vektorli ifoda orqali topamiz:

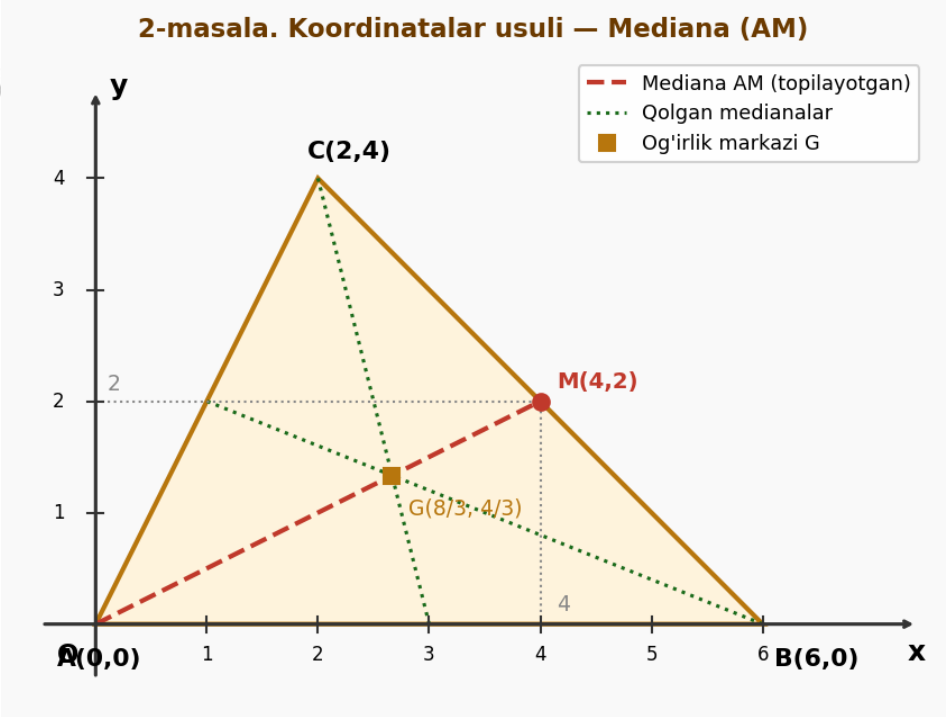
AM□ = (AB□ + AC□) / 2 = ((6, 0) + (2, 4)) / 2 = (8, 4) / 2 = (4, 2)

AM medianananing uzunligini vektorning moduli formulasi orqali hisoblaymiz:

|AM□| = √(4² + 2²) = √(16 + 4) = √20 = 2√5 ≈ 4.47 birlik

Javob (vektor usuli): *AM = 2√5 ≈ 4.47 birlik.*

2-usul: Koordinatalar sistemasini kiritish orqali yechish



2-rasm. ABC uchburchak va koordinatalar sistemasi (koordinatali usul)

Yechim. Koordinatalar sistemasini kiritib, barcha nuqtalar koordinatalarini aniqlaymiz. A(0, 0), B(6, 0), C(2, 4) nuqtalar berilgan.

Birinchi qadam: M nuqta — BC kesmasining o'rta nuqtasi. O'rta nuqta formulasi:

M = ((xB + xC) / 2 , (yB + yC) / 2) = ((6+2)/2 , (0+4)/2) = (4, 2)

Ikkinchi qadam: A(0, 0) va M(4, 2) nuqtalar orasidagi masofani ikki nuqta orasidagi masofa formulasi bilan hisoblaymiz:

AM = √((xM − xA)² + (yM − yA)²)

AM = √((4−0)² + (2−0)²) = √(16 + 4) = √20 = 2√5 ≈ 4.47 birlik

Javob (koordinatali usul): *AM = 2√5 ≈ 4.47 birlik.*

Ikki usulni taqqoslash

Ikkala usul bir xil natija berdi: AM = $2\sqrt{5} \approx 4.47$ birlik. Biroq ularning yechish yo'li va didaktik qiymati farq qiladi. Vektorli usulda AM vektori to'g'ridan-to'g'ri AB va AC vektorlarining yarim yig'indisi sifatida topildi — bu formulaning geometrik ma'nosi ko'rgazmali bo'lib, uchburchakdagi mediana tushunchasini vektorlar tili orqali ifodalaydi. Koordinatali usulda esa o'rta nuqta va masofa formulalari qo'llanilib, hisob-kitob arifmetik amallar asosida amalga oshirildi. Bu usul o'quvchilar uchun tushunarliroq va tekshirish osonroq, ammo u geometrik aloqalarni bevosita ko'rsatmaydi. Shu sababli ikkala metoddan ongli foydalanish bilim va tafakkur chuqurligining muhim ko'rsatkichidir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Efimov N.V. Analitik geometriya kursi. — Toshkent: O'qituvchi, 2018. — 336 b.

2. Rashidov I.R., Xoliqov A.A. Oliy matematika: vektor algebra va analitik geometriya. — Toshkent: TDTU nashriyoti, 2020. — 210 b.

3. Prasolov V.V. Vektorlar va koordinatalar yordamida masalalar yechish. — Moskva: MTSHMO, 2015. — 288 b.

4. Atanasyan L.S. va boshq. Geometriya: oliy o'quv yurtlari uchun darslik, I-II qismlar. — Moskva: Prosvesheniye, 2019. — 415 b.

5. Cho'liyev Sh.N. Maktab geometriyasi masalalarini vektorlar yordamida yechish. — Toshkent: Yangi asr avlodi, 2021. — 176 b.

6. Sharipov R.A. Kurs vektornogo analiza i tenzornogo ischisleniya. — Ufa: BGU, 2017. — 243 s.

7. Karimov B.X. O'rta maktabda vektorlar mavzusini o'qitishning zamonaviy metodlari // Matematika ta'limi jurnali. — 2022. — №3. — B. 45–52.

8. Smirnova I.M., Smirnov V.A. Geometriya v shkole: innovatsionnyy podkhod. — Moskva: Prosvesheniye, 2016. — 192 s.

9. Bekmurodov M.U. Koordinatali usulni o'rgatishda interfaol metodlardan foydalanish // Pedagogika va psixologiya. — 2023. — №1. — B. 78–84.

10. Gelfand I.M., Glagoleva E.G., Shnol E.E. Funktsii i grafiki. — Moskva: Nauka, 2014. — 112 s.