# ALGEBRAIK MASALALARNI GEOMETRIK CHIZMALAR YORDAMIDA YECHISH:

***Madraximov Temur.Rustambekovich*** *–Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat unversiteti Matematik tahlil kafedrasi o`qtuvchisi, temurmadraximov1995@gmail.com*

***Axmedov Qurbonbay Yuldashboyevich*** *–Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat unversiteti Matematik tahlil kafedrasi katta o`qtuvchisi, axmedovqurbonbay@gmail.com*

***To`raxonov Islombek Farhodovich*** *–Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat unversiteti Matematik tahlil kafedrasi o`qtuvchisi islombektoraxonov0804@gmail.com*

**Kalit so‘zlar:** geometrik talqin, vizual algebralash, yuzlar metodi, koordinatalar usuli, vektorli modellashtirish, irratsional tenglamalar, parametrli masalalar, akademik vizualizatsiya.

**Ключевые слова:** геометрическая интерпретация, визуальная алгебра, метод площадей, метод координат, векторное моделирование, иррациональные уравнения, задачи с параметрами, академическая визуализация.

**Keywords:** geometric interpretation, visual algebra, area method, coordinate approach, vector modeling, irrational equations, parametric problems, academic visualization.

**Kirish.** Zamonaviy matematika ta’limida va ilmiy-tadqiqot metodologiyasida murosa va sintez usullariga bo‘lgan talab tobora ortib bormoqda. Xususan, algebra va geometriya fanlarining o‘zaro integratsiyasini ta’minlash — murakkab algebraik masalalarni ko‘rgazmali, sodda va samarali usulda yechish imkonini beradi. Algebraik ifodalar, tenglamalar, tengsizliklar va ularning sistemalarini geometrik chizmalar hamda tasvirlar yordamida interpretatsiya qilish (geometrik talqin)

o‘quvchi va tadqiqotchilarda analitik hamda fazoviy tafakkurning uzviy rivojlanishiga xizmat qiladi.

Klassik matematikada algebraning geometrik ildizlari Evklid va Al-Xorazmiy asarlariga borib taqalsa-da, bugungi kunda bu yondashuv parametrik va irratsional masalalarni, ekstremal qiymatlarni topish hamda nostandart tenglamalarni yechishda muhim mantiqiy apparat vazifasini o‘tamoqda. Vizual algebra algebraning mavhum tushunchalarini aniq geometrik obyektlar (kesmalar, yuzlar, vektorlar, ko‘pburchaklar) bilan bog‘lash orqali mantiqiy mushohadani soddalashtiradi va yechimning ko‘rgazmaliligini ta’minlaydi.

Masalalarni yechish chizmalar yordamida amalga oshiriladi. Ushbu chizmalarning qurilishi masalani "ko‘rish" – masalaga kiritilgan miqdorlar orasidagi aloqalarni o‘rnatish va o‘rganish, echimning eng qisqa yo‘lini tanlash imkonini beradi.

Masalan, harakatdagi matn masalalarni yechish uchun grafikalardan foydalanish va geometrik shakllarning turli xil xususiyatlaridan foydalanib, kerakli kesmalarning uzunligini aniqlash qulay.

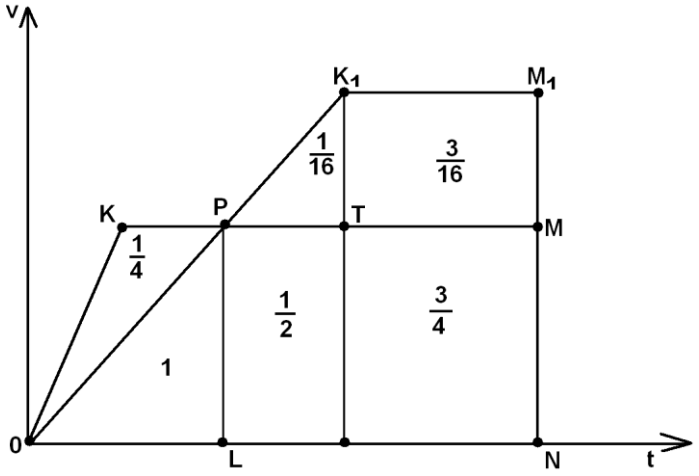
Ko‘pincha matnli masalalarda ko‘rib chiqilayotgan qiymat qolgan ikkitasining ko‘paytmasi bo‘ladi. Shuning uchun, bunday masalalarda bunday ko‘paytmalarni to‘rtburchak, parallelogram yoki uchburchak yuzasi shaklida tasavvur qilish uchun yuzalar usuliga o‘tish tavsiya etiladi.

2.1.1-masala. $A$ va $B$ punktlardan bir-biriga qarama-qarshi ikkita poyezd bir vaqtning o‘zida yo‘lga chiqishdi. Ularning har biri avval tekis tezlanuchan (poyezdlarning boshlang’ich tezligi nolga teng, tezlanishlari farq qiladi), so‘ngra ma’lum tezlikka erishgach tekis harakatlanishdi.

Poyezdlarning tekis harakatlanish tezliglarining nisbati $\frac{5}{4}$ ga teng. Vaqtning qaysidir momentida poyezdlarning tezliklari teng edi va shu vaqtga qadar ulardan

biri boshqasiga qaraganda $1\frac{1}{4}$ baravar ko‘p masofani bosib o‘tdi. $B$ va $A$ punktlariga poyezdlar bir vaqtning o‘zida etib kelishdi. Poyezdlarning tezliglari teng bo‘lgan paytgacha ularning har biri yo‘lning qancha qismini bosib o‘tgandi

Yechish:




2.1-chizma

Har bir poyezd uchun tezlikning vaqtga bog‘liqligini tasvirlovchi grafiklarni ko‘rib chiqamiz (2.1-chizma) $OKM$ singan chiziq bir poyezd uchun va $OK_1M_1$ singan chiziq boshqasi uchun. Bosib o‘tgan yo‘lning uzunligi mos keladigan shaklning yuzasiga teng. Trapetsiya yuzasiga ko‘ra $OKMN$ va $OK_1M_1N$ teng, demak $OKP$ va $PK_1M_1M$ shakllar ham teng kuchlidir. $OKPL$ yuzasi $OPL$ yuzasining $\frac{5}{4}$ qismiga teng. Agar $OPL$ yuzasi 1 ga teng bo‘lsa, $OKP$ yuzasi $\frac{1}{4}$ ga teng. $PK_1T$ yuzasi $\frac{1}{16}$ ga teng. Chunki $K_1T = \frac{1}{4}PL$. Endi qolgan qisimlarning yuzalarini oson aniqlab olamiz.

Javob: $\frac{1}{2}$ va $\frac{2}{5}$

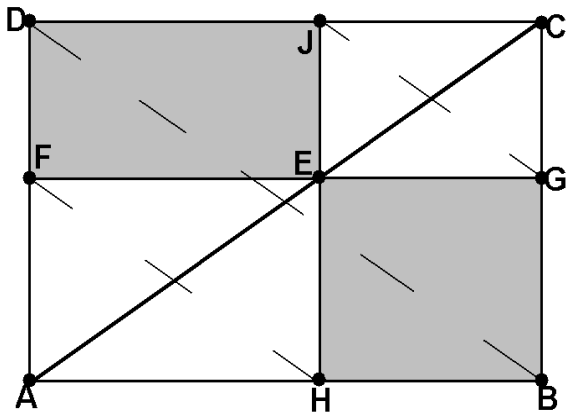
2.1.2-masala. Poyezd $A$ shahardan $B$ shahargacha bo‘lgan masofani 10 soat 40 daqiqa ichida bosib o‘tadi. Agar poyezd tezligi $10\,km/s$ kamroq bo‘lganda, u 2

soat 8 daqiqa kechga qolib kelardi. Shaharlar orasidagi masofani va poyezd tezliglarini aniqlang.

Yechish: Yordamchi teoremani ko‘rib chiqamiz (2.2-chizma): Agar to‘g‘ri to‘rtburchakning $AC$ dioganalining ixtiyoriy $E$ nuqtasidan $FG \parallel AB$ va $HJ \parallel AD$ to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan bo‘lsa, u holda

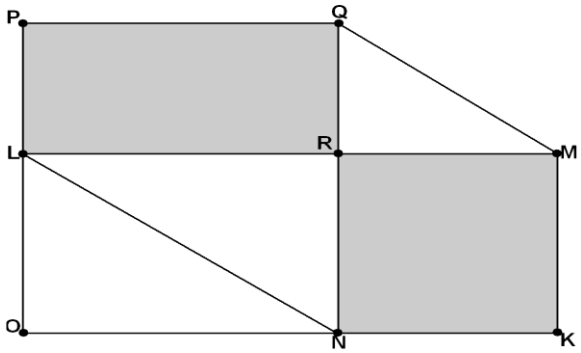
1. hosil bo‘lgan $HBGE$ va $FEJD$ to‘rtburchaklar teng kuchlidir;

2. $ABGF$ va $AHJD$ to‘rtburchaklar ham teng; bundan tashqari $FH$, $DB$ va $JG$ kesmalar parallel.




2.2-chizma

Masala shartida nazarda tutilgan birinchi holda, poyezdning davomiyligi $OL$ kesma bilan (2.3-chizma) va poyezd tezligi (uning qiymati hali noma’lum) – $OK$ kesma bilan tasvirlansin. Bu holda $OLMK$ to‘rtburchakning yuzasi $A$ va $B$ shaharlari orasidagi masofaga to‘g‘rikeladi.




2.3-chizma.

Ikkinchi holda, poyezd tezligi $ON$ kesma bilan va mos keluvchi vaqt (10 soat 40 daqiqa +2 soat 8 daqiqa)$OP$ kesma bilan tasvirlansin. Bunday holda, $A$ va $B$ shaharlari orasidagi masofa $OLMK$ uchburchagiga teng kuchli bo‘lgan $OPQN$ to‘rtburchakning yuzasi bilan aniqlanadi. Yordamchi teoremaga ko‘ra quyidagilar o‘rinli bo‘lishi kerak:

$NL$ P$MQ$ va$DOLN$ : $DRQM$

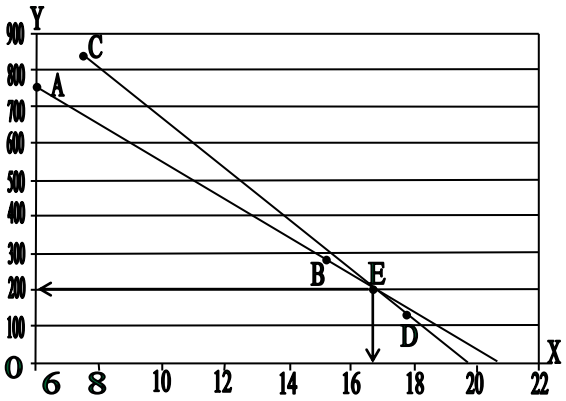
Ushbu uchburchaklar o‘xshashligidan kelib chiqadi:

$$\frac{ON}{10} = \frac{10s.40d.}{2s.8d.} \text{ yoki } \frac{640}{128}$$

bundan $ON = \frac{640}{128} \times 10 = 50(km/soat)$ va $OK = 50 + 10 = 60(km/soat)$

10 soat 40 daqiqa +2 soat 8 daqiqa=12 soat 48 daqiqa. Demak, shaharlar orasidagi masofa $50 \times 12\frac{48}{60} = 640(km)$. Javob: $640(km)$

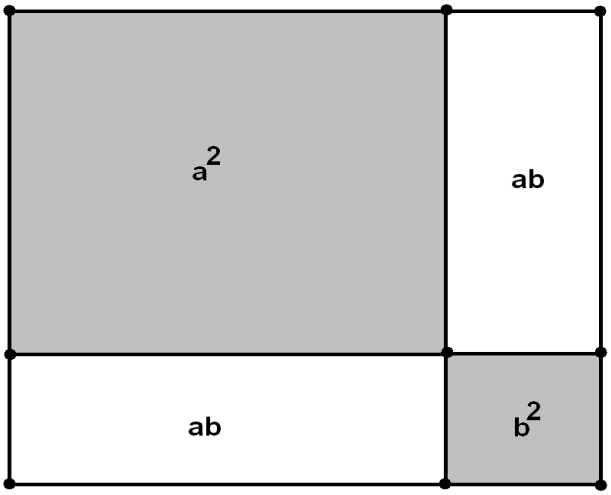
2.1.3-masala. Bir chuqurda $720\ m^2$ suv, ikkinchisida $840\ m^2$ suv bor edi. Ertalab ular $48 m^2/soat$ quvvatga ega nasos yordamida birinchi chuqurdan suv chiqarishni boshladilar va $8$ soat. – ikkinchi chuqurdan $72 m^2/soat$ quvvatga ega nasos bilan. Ikkala chuqurning suvi necha soatdan keyin teng bo‘ladi? Yechish: Masalaning sharti shuni ko‘rsatadiki, har bir nasos bilan suvni pompalash bir xil jarayondir va shuning uchun u to‘g‘richiziqli grafik bilan tasvirlanadi. Keling, "vaqt - suv miqdori" koordinata o‘qlari uchun o‘lchovni tanlaymiz va birinchi chuqurdagi vaqt va suv miqdori o‘rtasidagi bog’liqlikni chizamiz. Buning uchun kerakli grafikning ikkita nuqtasiga ega bo‘lish kifoya.




Birinchi nuqta $(A)$ quyidagi shartga muvofiq belgilanadi: ertalab soat 6 da birinchi chuqurda $720m^2$ suv bor edi. Har soatda birinchi chuqurdagi suv miqdori $48m^2$ ga kamayishini bilib, siz chuqurda qancha suv bo‘lishini hisoblab, grafikning ikkinchi nuqtasini topishingiz mumkin, masalan, soat 7 yoki 9 da., lekin ikkita yaqin nuqta orqali to‘g‘richiziq o‘tkazilmasligi kerak - bu qurilishning aniqligini kamaytirishi mumkin: shuning uchun biz birinchi chuqurda qancha suv qolishini hisoblaymiz, masalan, 16 soatgacha. $16s. - 6s. = 10s.$ $48m^2 \times 10 = 480m^2$; $720m^2 - 480m^2 = 240m^2$ 16 va 240 sonlari kerakli grafikning ikkinchi nuqtasi $(B)$ koordinatalari hisoblanadi. Xuddi shu chizmada $C(8;840)$ va $D(18;120)$ nuqtalarida biz ikkinchi chuqurdagi vaqt va suv miqdori o‘rtasidagi bog’liqlikni chizamiz. Endi masalada berilgan savolga javob berish uchun jadvalga bir qarash kifoya: "ikkala chuqurning suvi necha soatdan keyin teng bo‘ladi?". Bu ikkala grafikning umumiy $-E$ nuqtasi, ya’ni 17 soat.

**Algebraik ayniyatlar: yig’indining kvadrati.**

Evklidning mashhur "boshlanishlari" ning ikkinchi kitobida bizga ma’lum bo‘lgan algebraik ayniyatlar geometrik tarzda taqdim etilgan

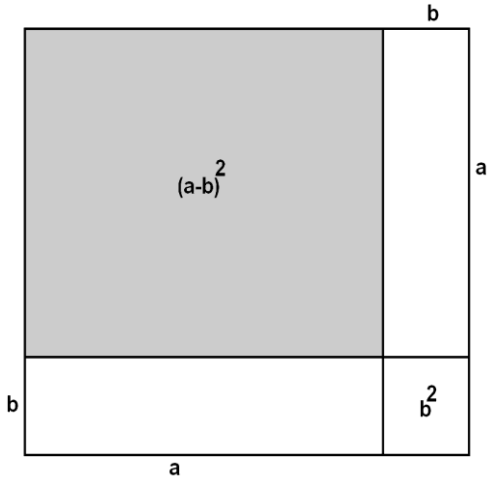



2.4-chizma

Masalan: "agar kesma biron bir tarzda ikkita kesmaga bo‘lingan bo‘lsa, unda butun kesmada qurilgan kvadratning yuzasi ikkita kesmaning har birida qurilgan kvadratlar yuzalarining yig’indisiga va tomonlari bu ikki kesma bo‘lgan to‘rtburchakning ikki baravar yuzasiga teng bo‘ladi" Shubhasiz, bu ikkita son yig’indisining kvadrat formulasi.

**Algebraik ayniyatlar: ayirmaning kvadrati.**

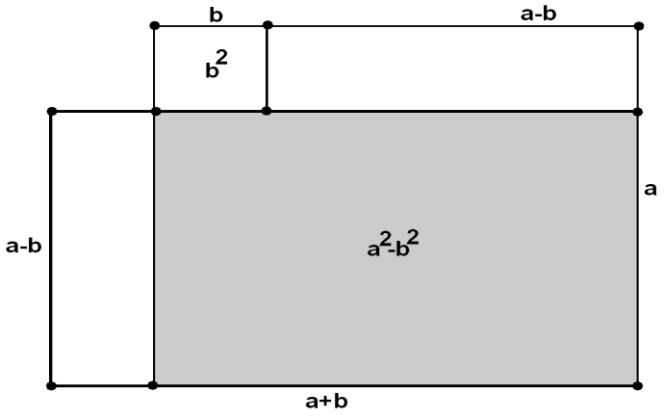
Bu yerda taniqli algebraik ayniyatning yana bir geometrik versiyasi. 2.5-chizma.




2.5-chizma.

**Algebraik ayniyatlar: kvadratlarning farqi.**

Tomoni $a$ bo‘lgan kvadratdan tomoni $b$ bo‘lgan kvadratni kesish natijasida olingan shaklning yuzas $(a - b)$ va $(a + b)$ tomonlarga qurilgan to‘g‘rito‘rtburchakning yuzasiga teng. (2.6-chizma.)




2.6-chizma.

**Arifmetik progressiya**

2.1.4-masala. Qatorning yig’indisini toping: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)$

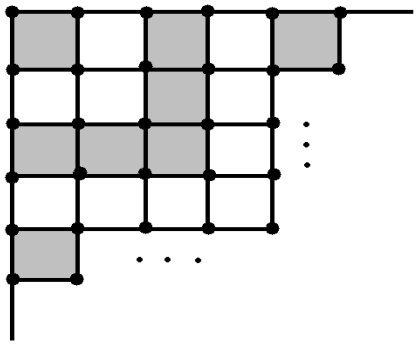
Yechish:

Yordam:

$1 + 3 = ?$

$1 + 3 + 5 = ?$

$1 + 3 + 5 + 7 = ?$



2.7-chizma

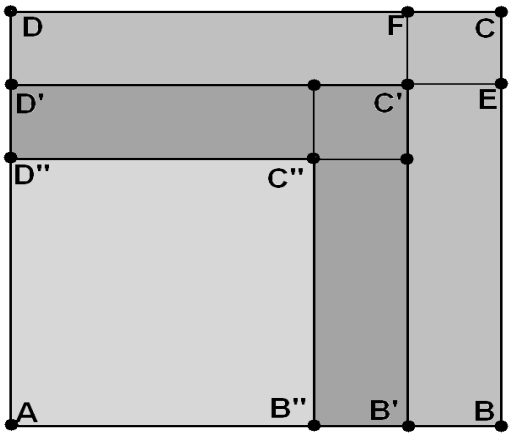
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ Pifagorchilar bu nisbatni aynan shunday rasm yordamida isbotlaganlar. Xuddi shu rasm bilan, nima uchun kesmaning qismi tekis tezlanuvchan harakati bilan, u teng ketma-ket vaqt intervalida bosib o‘tgan kesmalar ketma-ket toq sonlar sifatida qaralishini tushuntirish qulay (Galileyning kashfiyoti).

Arab matematikasi, Al-Karadji (1016), tenglamalarni yechishning arifmetik usullarini afzal ko‘rgan. Uning xizmati shundaki, u cheksiz ko‘p musbat va manfiy

noma'lum darajalarni va ko‘pxadlar bo‘yicha arifmetik operatsiyalarni kiritdi (garchi bo‘linish paytida u faqat ko‘pxadni birxadga bo‘lish bilan cheklangan bo‘lsa ham). Biroq, al- Karadjiga geometrik usullar ham begona emas edi. Natural sonlar kublari yig'indisi formulasining elegant geometrik-algebraik isbotini ko‘ramiz (al-Karadji $n=10$).

2.1.5-masala. Isbotlang: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left(1 + 2 + 3 + \ldots + n\right)^2$

Yechish: Tomoni $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$ (2.8-chizma.) yig'indiga teng bo‘lgan $ABCD$ kvadratini ko‘rib chiqamiz. Kvadrat $BB¢C¢D¢DC$ burchag ajralib turadi, ya'ni $DD¢= BB¢= n$ Ushbu burchakning yuzasi $D¢DCE$ va $B¢FCB$ to‘g‘rito‘rtburchaklarning yuzalarining yig'indisidan $C¢FCE$ kvadratining yuzasini ayirmasiga teng, va quyidagicha ifodalanadi




2.8-chizma

Ushbu ifodani arifmetik progressiya yig'indisi formulasidan $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = n\left(n + 1\right)/2$ quyidagi tenglikga ega bo‘lamiz

$2n\left(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n\right) - n^2 = 2n\,\frac{n\left(n + 1\right)}{2} - n^2 = n^3$ Keyinchalik $AB¢C¢D¢$ kvadratini ko‘rib chiqamiz. Bundan tashqari unda, $B¢B¢¢C¢¢D¢¢D¢C¢$ burchagi ajralib turadi, ya'ni $D¢D¢¢ - B¢B¢¢= n - 1$ Xuddi shunday, biz bu burchakning maydoni $\left(n - 1\right)^3$ ekanligini olamiz. Ushbu jarayonni davom ettirib, biz yon

tomoni 1 bo‘lgan kvadratga etib boramiz va bu kvadratning yuzasi barcha hosil bo‘lgan burchaklarning yuzalariga teng bo‘ladi. Bizda, $1^2 = 1^3$ shuning uchun

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left(1 + 2 + 3 + \ldots + n\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

## Adabiyotlar

1. Шклярский Д.О., Ченсов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачы на максимум и минимум. М.: Наука, 1970
2. Болтянснский В.Г.Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачы на максимум и минимум. // Енсиклапедия елементарной математики. Кн. М.: Наука, 1966. С.307-348.
3. Понарин Я. П. Елементарная геометрия: В 2 т.-Т.1: Планаметрия, преобразования плоскости. —М.: МСНМО, 2004.— 312 с.
4. Saparboev J., Egamov M. Akademik lisey o‘quvchilarining fazoviy tasavvurini va matematik tafakkurini rivojlantirishda ba’zi masalalar.//Tabiiy fanlarni o‘qitishni gumanitarlashtirish. Universitet ilmiy-amaliy konferensiya materiallari. 2012y. TDPU.
5.Г.З.Генкин Геометричесие решения негеометрических задач Москва 2007
6. Быков А.А.Сборник задач по математике.–М.:Изд..дом ГУ ВШЭ,2008
7.Лысенко Ф.Ф. Учимся решать задачи с параметром. Ростов-на-Дону: Легион, 2012
8. Окунев А.А. Графическое решение уравнений с параметрами. – М.: Школа Пресс,1996
9.Пирютко О Н «Графический метод решения текстовых задач» - Минск.: Новое знание,2010
10. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач-М. Просвещение, 1991