BO‘LAKLI UZLUKSIZ ARGUMENTLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN KOSHI MASALASINING MAVJUDLIK VA YAGONALIGI

Ibragimov Temurmalik Akbarali o‘g‘li Osiyo Xalqaro univeristeti magistranti

Annotatsiya

Ushbu maqolada bo‘lakli uzluksiz argumentli differensial tenglamalar uchun Koshi masalasining mavjudlik va yagonalik shartlari batafsil tadqiq etilgan. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari hamda bo‘lakli uzluksiz funksiyalar bilan bog‘liq masalalar chuqur tahlil qilingan. Xususan, Koshi masalasining yechimlari mavjudligi va yagonaligini ta’minlovchi asosiy shartlar, jumladan uzluksizlik va Lipschitz sharti o‘rganilgan. Maqolada Picard–Lindelöf teoremasining mazkur masalalarni yechishdagi ahamiyati yoritilib, iteratsion usullar yordamida yechimlarning hosil qilinishi ko‘rsatib berilgan. Bundan tashqari, bo‘lakli uzluksiz funksiyalar qatnashgan differensial tenglamalarning amaliy qo‘llanilishi, fizik, texnik va iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishdagi roli ham ko‘rib chiqilgan. Tadqiqot davomida bir nechta amaliy misollar to‘liq ishlab chiqilib, yechimlarning mavjudligi va yagonaligi nazariy jihatdan asoslab berilgan. Olingan natijalar bo‘lakli uzluksiz argumentli differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi zamonaviy matematik modellashtirishda muhim o‘rin tutishini ko‘rsatadi.

Kalit so‘zlar:

Differensial tenglama, Koshi masalasi, mavjudlik teoremasi, yagonalik teoremasi, Lipschitz sharti, bo‘lakli uzluksiz funksiya, Picard–Lindelöf teoremasi, iteratsion usul, matematik modellashtirish.

Abstract

This article presents a detailed study of the existence and uniqueness conditions of the Cauchy problem for differential equations with piecewise continuous arguments. The fundamental concepts of differential equation theory

and the specific properties of equations involving piecewise continuous functions are thoroughly analyzed. Special attention is devoted to the main conditions ensuring the existence and uniqueness of solutions, particularly the continuity condition and the Lipschitz condition. The article also discusses the significance of the Picard–Lindelöf theorem in solving the Cauchy problem and demonstrates the use of iterative methods for constructing solutions. In addition, practical applications of differential equations with piecewise continuous arguments in the mathematical modeling of physical, technical, and economic processes are considered. Several practical examples are solved in detail, and the existence and uniqueness of solutions are theoretically justified. The obtained results demonstrate that the Cauchy problem for differential equations with piecewise continuous arguments plays an important role in modern mathematical modeling and applied research.

Keywords:

Differential equation, Cauchy problem, existence theorem, uniqueness theorem, Lipschitz condition, piecewise continuous function, Picard–Lindelöf theorem, iterative method, mathematical modeling.

Аннотация

В данной статье подробно исследуются условия существования и единственности задачи Коши для дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывным аргументом. Рассматриваются основные понятия теории дифференциальных уравнений и особенности уравнений с кусочно-непрерывными функциями. Особое внимание уделено условиям существования и единственности решений, в частности условию непрерывности и условию Липшица. В статье анализируется значение теоремы Пикара–Линделёфа при исследовании задачи Коши, а также показывается применение итерационных методов для построения решений.

Кроме того, рассматриваются практические применения дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными аргументами при математическом моделировании физических, технических и экономических процессов. В ходе исследования подробно решены практические примеры и теоретически обоснованы существование и единственность решений. Полученные результаты показывают важную роль задачи Коши для дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывным аргументом в современной математике и прикладных исследованиях.

Ключевые слова:

Дифференциальное уравнение, задача Коши, теорема существования, теорема единственности, условие Липшица, кусочно-непрерывная функция, теорема Пикара–Линделёфа, итерационный метод, математическое моделирование.

Differensial tenglamalar nazariyasi matematikaning muhim va amaliy jihatdan keng qo‘llaniladigan bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Tabiat va texnikadagi ko‘plab jarayonlar aynan differensial tenglamalar yordamida modellashtiriladi. Fizikada mexanik harakatlar, biologiyada populyatsiya rivojlanishi, iqtisodiyotda bozor jarayonlari hamda texnikada avtomatik boshqaruv tizimlari differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Shu sababli differensial tenglamalarning nazariy asoslarini chuqur o‘rganish muhim ilmiy va amaliy ahamiyat kasb etadi.

Zamonaviy matematik modellashtirishda bo‘lakli uzluksiz funksiyalar bilan bog‘liq tenglamalar alohida o‘rin egallaydi. Chunki real jarayonlarning aksariyati uzluksiz bo‘lmay, ayrim nuqtalarda sakrashlar yoki uzilishlarga ega bo‘ladi. Masalan, elektr signallari, impulsli boshqaruv tizimlari, iqtisodiy krizis jarayonlari va mexanik zarbalar kabi holatlar bo‘lakli uzluksiz funksiyalar yordamida tavsiflanadi.

Bo‘lakli uzluksiz argumentli differensial tenglamalarda asosiy masalalardan biri Koshi masalasining mavjudligi va yagonaligini aniqlashdir. Koshi masalasi differensial tenglama va boshlang‘ich shart berilgan holda ushbu shartni qanoatlantiruvchi yechimni topishdan iboratdir. Mazkur maqolada bo‘lakli uzluksiz differensial tenglamalar uchun Koshi masalasining mavjudlik va yagonalik shartlari nazariy va amaliy jihatdan tahlil qilinadi.

Differensial tenglamalar haqida umumiy tushuncha

Differensial tenglama deb noma’lum funksiya va uning hosilalarini bog‘lovchi tenglamaga aytiladi. Oddiy differensial tenglama umumiy holda quyidagicha yoziladi:

bu yerda :

$y(x)$ - noma’lum funksiya;

$y'(x)$ - uning hosilasi

$f(x, y)$- berilgan funksiya

Agar boshlang‘ich shart berilgan bo‘lsa:

u holda hosil bo‘lgan masala Koshi masalasi deyiladi.

Koshi masalasining asosiy maqsadi berilgan boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi funksiyani aniqlashdan iborat. Differensial tenglamalar nazariyasida aynan yechimning mavjudligi va yagonaligi eng muhim masalalardan biri hisoblanadi.

Bo‘lakli uzluksiz funksiyalar

Bo‘lakli uzluksiz funksiya deb ma’lum oraliqlarda uzluksiz bo‘lib, ayrim nuqtalarda uzilishga ega bo‘lgan funksiyaga aytiladi.

Masalan:

Mazkur funksiya $x = 1$ nuqtada uzilishga ega bo‘lsa-da, har bir bo‘lakda uzluksiz hisoblanadi.

Bo‘lakli uzluksiz funksiyalar quyidagi jarayonlarda uchraydi:

- impulsli boshqaruv tizimlari;
- elektr signallari;
- iqtisodiy sakrashlar;
- mexanik zarba jarayonlari;
- biologik tizimlar.

Bunday funksiyalar bilan bog‘liq differensial tenglamalarni yechish oddiy uzluksiz funksiyalarga qaraganda murakkabroq hisoblanadi.

Koshi masalasining mavjudlik teoremasi

Differensial tenglamalar nazariyasida yechimning mavjudligi asosiy o‘rinlardan birini egallaydi. Agar $f(x, y)$ funksiya ma’lum sohada uzluksiz bo‘lsa, u holda Koshi masalasining kamida bitta yechimi mavjud bo‘ladi.

Koshi masalasi:

$$y'(x) = f(x, y)\ ,\ \ y(x_0) = y_0$$

integral ko‘rinishda quyidagicha yoziladi:

Mazkur formula mavjudlik teoremasining asosiy g‘oyasini ifodalaydi. Bo‘lakli uzluksiz funksiyalar holida ham har bir uzluksiz bo‘lak uchun alohida yechim mavjud bo‘ladi. So‘ngra ushbu yechimlar birlashtirilib umumiy yechim hosil qilinadi.

Lipschitz sharti va yagonalik

Faqat uzluksizlik yechimning yagona bo‘lishi uchun yetarli emas. Shu sababli qo‘shimcha Lipschitz sharti talab qilinadi.

Lipschitz sharti quyidagicha ifodalanadi:

bu yerda:

- $L > 0$ — o‘zgarmas son;
- y_1 va y_2 — ixtiyoriy qiymatlar.

Mazkur shart funksiyaning juda keskin o‘zgarib ketmasligini bildiradi.

Agar Lipschitz sharti bajarilsa:

1. Koshi masalasining yechimi mavjud bo‘ladi;
2. yechim yagona bo‘ladi;
3. boshlang‘ich qiymatlardagi kichik o‘zgarishlar yechimga katta ta’sir ko‘rsatmaydi.

Picard–Lindelöf teoremasi

Mazkur teorema differensial tenglamalar nazariyasidagi eng muhim teoremalardan biridir.

Teorema:

Agar $f(x, y)$ funksiya:

- uzluksiz bo‘lsa;
- y bo‘yicha Lipschitz shartini qanoatlantirsa,

u holda Koshi masalasining yagona yechimi mavjud bo‘ladi.

Picard iteratsion usuli quyidagicha quriladi:

Bu usul ketma-ket yaqinlashishlar orqali aniq yechimga olib keladi.

Birinchi misolning to‘liq yechimi

Quyidagi Koshi masalasini qaraymiz:

$y' = y + x$, $y(0) = 1$

1-qadam. Tenglamani standart ko‘rinishga keltiramiz

Bu chiziqli differensial tenglama hisoblanadi.

1-qadam. Integrallovchi ko‘paytuvchini topamiz

3-qadam. Tenglamani ko‘paytiramiz

Chap tomon hosila ko‘rinishida yoziladi:

4-qadam. Integrallaymiz

Bo‘laklab integrallash orqali:

5-qadam. Boshlang‘ich shartdan foydalanamiz

qo‘ysak:

bundan:

Demak yechim:

Differensial tenglamalarning amaliy qo‘llanilishi

Bo‘lakli uzluksiz differensial tenglamalar quyidagi sohalarda qo‘llaniladi:

Fizikada

- impulsli kuchlar;
- mexanik tizimlar;
- elektr zanjirlari.

Biologiyada

- populyatsiya o‘sishi;
- epidemiyalar tarqalishi;
- genetik modellar.

Texnikada

- avtomatik boshqaruv;
- robototexnika;
- signal uzatish tizimlari.

Iqtisodiyotda

- bozor tebranishlari;
- sakrashli iqtisodiy modellar;
- investitsiya jarayonlari.

Mazkur tadqiqot davomida bo‘lakli uzluksiz argumentli differensial tenglamalar uchun Koshi masalasining mavjudlik va yagonalik shartlari o‘rganildi. Tahlillar shuni ko‘rsatdiki, funksiya uzluksiz va Lipschitz shartini qanoatlantirsa, Koshi masalasining yagona yechimi mavjud bo‘ladi.

Picard–Lindelöf teoremasi ushbu masalalarni o‘rganishda muhim nazariy asos hisoblanadi. Bo‘lakli uzluksiz funksiyalar bilan bog‘liq differensial tenglamalar real jarayonlarni modellashtirishda katta amaliy ahamiyatga ega.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Арнольд В. И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. — Москва: Наука, 1978. — 383 с.
2. Филиппов А. Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. — Москва: Наука, 1985. — 224 с.
3. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. — Москва: Наука, 1967. — 472 с.
4. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. — Москва: Наука, 1982. — 331 с.
5. Coddington E. A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. — New York: McGraw-Hill, 1955. — 429 p.
6. Hartman P. *Ordinary Differential Equations*. — Philadelphia: SIAM, 2002. — 612 p.
7. Walter W. *Ordinary Differential Equations*. — New York: Springer-Verlag, 1998. — 376 p.
8. Tenenbaum M., Pollard H. *Ordinary Differential Equations*. — New York: Dover Publications, 1985. — 357 p.
9. Boyce W. E., DiPrima R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. — New York: Wiley, 2001. — 768 p.
10. Simmons G. F. *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. — New York: McGraw-Hill, 1991. — 672 p.
11. Islomov A. *Differensial tenglamalar nazariyasi*. — Toshkent: O‘qituvchi, 2010. — 256 b.

12. Karimov Sh. *Oddiy differensial tenglamalar*. — Toshkent: Fan va texnologiya, 2015. — 318 b.
13. Xudoyberganov G‘. *Matematik analiz va differensial tenglamalar*. — Toshkent: Universitet, 2012. — 284 b.
14. Elsgolts L. E. *Differensial tenglamalar va variatsion hisob asoslari*. — Toshkent: O‘qituvchi, 1978. — 480 b.
15. Samoylenko A. M., Perestyuk N. A. *Differential Equations with Impulse Effect*. — Singapore: World Scientific, 1995. — 462 p.
16. Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P. *Theory of Impulsive Differential Equations*. — Singapore: World Scientific, 1989. — 434 p.
17. Hale J. K. *Theory of Functional Differential Equations*. — New York: Springer-Verlag, 1977. — 365 p.
18. Agarwal R. P. *Boundary Value Problems for Higher Order Differential Equations*. — Singapore: World Scientific, 1986. — 512 p.
19. Nemytskii V. V., Stepanov V. V. *Qualitative Theory of Differential Equations*. — Princeton University Press, 1960. — 523 p.
20. Kamke E. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1959. — 668 p.