MATEMATIK MODELLARNI YECHISHDA SUN'IY INTELLEKT VA SONLI USULLARNING INTEGRATSIYASI

Nazirova Dilorom Khusnutdinovna
O'zbekiston Milly universiteti katta o'qituvchisi

Annotatsiya. Maqolada matematik modellarni sonli yechishda sun'iy neyron tarmoqlarni klassik sonli usullar bilan birlashtiruvchi ikki gibrid sxema taklif etiladi va tahlil qilidi. Birinchi sxemada neyron tarmoq nochiziqli chegaraviy masala uchun Nyuton usulining boshlang'ich yaqinlashishini beradi; ikkinchisida u siyrak to'rdagi chekli ayirmalar yechimining tugun xatoligini tuzatadi. Ikkala sxema uchun xatolik va iteratsiyalar soni analitik baholangan. Bratu masalasida tarmoq bergan boshlang'ich yaqinlashish Nyuton iteratsiyalari sonini 7 tadan 4 tagacha kamaytirdi va nol boshlang'ich yaqinlashishda erishib bo'lmaydigan yuqori tarmoq yechimini 4–5 iteratsiyada topdi. Kichik parametrli konveksiya-diffuziya masalasida N = 20 tugunli to'rdagi tuzatilgan yechim xatoligi 10 dan 1116 martagacha kamaydi va 80–1280 tugunli oddiy sxema aniqligiga yetdi. Natijalar tarmoq sonli usul o'rnini egallamasdan, uning ichidagi aniq bir bosqichga joylashtirilganda eng ishonchli samara berishini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: sun'iy intellekt, neyron tarmoq, sonli usullar, chekli ayirmalar usuli, Nyuton usuli, Bratu masalasi, konveksiya-diffuziya tenglamasi, gibrid modellashtirish.

Abstract. The paper proposes and analyses two hybrid schemes that combine artificial neural networks with classical numerical methods for solving mathematical models. In the first scheme a network supplies the initial guess of Newton's method for a nonlinear boundary value problem; in the second it corrects the nodal error of a coarse-grid finite-difference solution. Error and iteration-count estimates are derived analytically for both schemes. For the Bratu problem the network-based initial guess reduced the number of Newton iterations from 7 to 4 and reached the upper-branch solution, unattainable from the zero guess, in 4–5

iterations. For a singularly perturbed convection-diffusion problem the corrected solution on a 20-node grid reduced the error by a factor of 10 to 1116, matching the accuracy of the plain scheme on 80–1280 nodes. The results show that a network is most reliable when it is embedded into a specific stage of a numerical method rather than replacing it.

Keywords: artificial intelligence, neural network, numerical methods, finite difference method, Newton's method, Bratu problem, convection-diffusion equation, hybrid modelling.

Аннотация. В статье предложены и проанализированы две гибридные схемы, объединяющие искусственные нейронные сети с классическими численными методами решения математических моделей. В первой схеме сеть задаёт начальное приближение метода Ньютона для нелинейной краевой задачи, во второй — корректирует узловую погрешность конечно-разностного решения на грубой сетке. Для обеих схем аналитически получены оценки погрешности и числа итераций. Для задачи Брату начальное приближение сети сократило число итераций Ньютона с 7 до 4 и позволило за 4–5 итераций найти решение верхней ветви, недостижимое из нулевого приближения. Для сингулярно возмущённой задачи конвекции-диффузии скорректированное решение на сетке из 20 узлов уменьшило погрешность в 10–1116 раз, достигнув точности обычной схемы на 80–1280 узлах.

Ключевые слова: искусственный интеллект, нейронная сеть, численные методы, метод конечных разностей, метод Ньютона, задача Брату, уравнение конвекции-диффузии, гибридное моделирование.

KIRISH

Fizika, gidravlika, iqtisodiyot va ekologiyadagi jarayonlarning matematik modellari odatda differensial tenglamalar ko‘rinishida yoziladi va aksariyat hollarda faqat sonli usullar bilan yechiladi. Chekli ayirmalar, chekli elementlar va Nyuton tipidagi iteratsion usullar puxta nazariy asosga ega: ularning turg‘unligi,

yaqinlashishi va xatolik tartibi qat’iy isbotlangan [1, 2]. Biroq bu usullarning hisoblash narxi to‘r qadami kichrayishi bilan tez o‘sadi, nochiziqli masalalarda esa natija boshlang‘ich yaqinlashishni tanlashga kuchli bog‘liq bo‘ladi.

So‘nggi yillarda sun’iy intellekt, xususan chuqur neyron tarmoqlar, differensial tenglamalarni yechishning yangi yo‘nalishini shakllantirdi. Fizik qonunlar bilan boshqariladigan neyron tarmoqlar (PINN) tenglama qoldig‘ini yo‘qotish funksiyasiga qo‘shish orqali yechimni bevosita tarmoq ko‘rinishida izlaydi [3, 4]. Operator o‘rganish usullari — DeepONet va Fur’ye neyron operatori — parametrdan yechimga akslantirishni butunligicha o‘rganadi [5, 6]. Ma’lumotlardan boshqaruvchi tenglamalarni aniqlash usullari ham rivojlanmoqda [7].

Shu bilan birga, sof neyron tarmoqli yondashuvlarning cheklovlari ham ma’lum: ularning aniqligi odatda klassik sxemalarnikidan past, xatolikni oldindan kafolatlash qiyin, o‘qitish esa uzoq va beqaror bo‘lishi mumkin [4]. Shu sababli tadqiqotchilar e’tibori integratsiyalashgan yondashuvga qaratilmoqda: tarmoq sonli usulni almashtirmaydi, balki uning ma’lum bir bosqichini yaxshilaydi. Masalan, ma’lumotlarga asoslangan diskretlashtirish [8], suyuqliklar dinamikasida siyrak to‘r yechimini tuzatish [9, 10] va nochiziqli masalalarda iteratsion usulni tarmoq yordamida boshlash [11] shunday ishlardandir. Ma’lumotlarni assimilyatsiya qilishda ansambl Kalman filtri ham model va kuzatuvni birlashtiruvchi gibrid vosita sifatida keng qo‘llanadi [12].

Mavjud ishlarning ko‘pchiligi yirik hisoblash tajribalariga tayanadi, gibrid sxemaning xatoligi va tejamkorligi esa analitik jihatdan kam baholanadi. Ushbu tadqiqotning maqsadi — sun’iy intellekt va sonli usullarni integratsiyalashning ikki asosiy mexanizmini (iteratsion usulni boshlash va siyrak to‘r yechimini tuzatish) aniq yechimi ma’lum model masalalarda tahlil qilish, ularning samarasini analitik baholar va qayta takrorlanadigan hisoblash tajribalari bilan asoslash.

Tadqiqot vazifalari: (1) gibrid sxemalarning umumiy tuzilishini ta’riflash; (2) har bir sxema uchun xatolik yoki iteratsiyalar soni bahosini analitik keltirib

chiqarish; (3) Bratu masalasi va kichik parametrli konveksiya-diffuziya masalasida sxemalarni sinab ko‘rish; (4) yondashuvning qo‘llanish chegaralarini aniqlash.

MATERIALLAR VA USULLAR

Integratsiyaning umumiy tuzilishi

Diskret ko‘rinishga keltirilgan masalani quyidagicha yozamiz:

bu yerda $U \in \mathbb{R}^n$ — to‘r tugunlaridagi noma’lumlar vektori, h — to‘r qadami, μ — model parametri. Klassik sonli usul U ni topish uchun algoritm beradi.

Integratsiyalashgan yondashuvda parametrlari θ bo‘lgan neyron tarmoq $\mathcal{N}_\theta$ algoritmning bitta bosqichiga joylashtiriladi. Ushbu ishda ikki mexanizm qaraladi:

Boshlash (warm start): tarmoq Nyuton usuli uchun boshlang‘ich yaqinlashish beradi, $U^{(0)} = \mathcal{N}_\theta(\mu)$; keyingi barcha hisoblashlarni klassik usul bajaradi.

Tuzatish (correction): siyrak to‘rdagi yechim U_h topiladi, so‘ng tarmoq uning tugun xatoligini baholaydi, $\widehat{U} = U_h + \mathcal{N}_\theta(x, \mu, U_h)$.

Ikkala holda ham tarmoq klassik usul tuzilmasini buzmaydi: birinchi holda yakuniy aniqlikni Nyuton usuli belgilaydi, ikkinchisida tarmoq faqat xatolikni bashorat qiladi.

1-model masala: Bratu tenglamasi

Bratu masalasi yonish nazariyasi va issiqlik o‘z-o‘zidan alangalanishi modellarida uchraydi:

Uning aniq yechimi ma’lum:

θ ga nisbatan tenglama $0 < \lambda < \lambda_c$ da ikki ildizga ega, shuning uchun masala ikkita yechimga — quyi va yuqori tarmoqqa ega. Kritik qiymat $\theta_c/4 \tanh \theta_c/4 = 1$ shartdan topiladi: $\theta_c \approx 4{,}798715$, $\lambda_c \approx 3{,}513831$.

Masala $N = 200$ qadamli tekis to‘rda ikkinchi tartibli markaziy ayirmalar bilan diskretlashtirildi:

Nochiziqli sistema Nyuton usuli bilan yechildi:

to‘xtash sharti $\| \Delta U^{(k)} \|_\infty < 10^{-10}$. Bu yerda $J = A - \lambda\,\mathrm{diag}(e^U)$, A — ikkinchi hosilaning uch diagonalli ayirmali operatori.

Tarmoqni o‘qitish uchun $[0{,}3;\ 3{,}45]$ oraliqdagi 40 ta λ qiymat olinib, ikkala tarmoqning aniq yechimlari to‘r tugunlarida hisoblandi (jami 15 920 ta nuqta). Tarmoq kirishi $(\lambda,\ b,\ x)$, bu yerda $b \in \{0{,}1\}$ — tarmoq belgisi; chiqishi — $u(x)$. Tarmoq har birida 48 neyronli ikki yashirin qatlamdan iborat, faollashtirish funksiyasi tanh, o‘qitish Adam algoritmi bilan bajarildi [13, 14].

2-model masala: kichik parametrli konveksiya-diffuziya tenglamasi

Aniq yechim

$x = 1$ nuqta yaqinida qalinligi $O(\varepsilon)$ bo‘lgan chegaraviy qatlamga ega. Markaziy ayirmali sxema

to‘r Pekle soni $\mathrm{Pe} = \frac{h}{2\varepsilon}$ birdan katta bo‘lganda monotonlikni yo‘qotadi va yechimda tebranishlar paydo bo‘ladi [1]. Shuning uchun kichik ε da aniq yechim olish uchun juda mayda to‘r talab qilinadi.

Siyrak to‘r sifatida $N_c = 20$ $(h = 0{,}05)$ olindi. O‘qitish uchun $[0{,}015;\ 0{,}25]$ oraliqda logarifmik teng taqsimlangan 60 ta ε qiymatda tugun xatoligi

hisoblandi. Tarmoq kirishi $(x_i,\ \ln\varepsilon,\ U_i)$, chiqishi δ_i. Har birida 64 neyronli ikki yashirin qatlam, tanh funksiyasi, L-BFGS algoritmi qo‘llanildi; kirish va chiqish qiymatlari standartlashtirildi.

Analitik baholar

1-tasdiq (tuzatish sxemasining xatoligi). $\widehat{U}_i = U_i + \mathcal{N}_\theta(x_i, \mu, U_i)$ bo‘lsin. U holda

Agar μ kompakt K to‘plamda o‘zgarsa va tarmoq δ ni K da η aniqlikda tekis yaqinlashtirsa, gibrid yechim xatoligi η dan oshmaydi va h ga bog‘liq emas.

Isbot. $u(x_i) - \widehat{U}_i = (u(x_i) - U_i) - \mathcal{N}_\theta = \delta_i - \mathcal{N}_\theta$, bundan birinchi tenglik kelib chiqadi. N_c qayd etilganda δ_i miqdor (ε, x_i) ning uzluksiz funksiyasi, chunki ayirmali sistema matritsasi $\varepsilon > 0$ da teskarilanuvchi va uning elementlari ε ga uzluksiz bog‘liq. Kompakt to‘plamda uzluksiz funksiyani bir qatlamli tarmoq

ixtiyoriy aniqlikda yaqinlashtira olishi universal approksimatsiya teoremasidan ma’lum [15]. ▫

Tasdiqdan muhim xulosa: gibrid sxemaning aniqligi to‘r qadami bilan emas, tarmoqning o‘rganish xatoligi bilan cheklanadi. Ayni paytda $\mu \notin K$ bo‘lganda (ekstrapolyatsiya) η bahosi kafolatlanmaydi.

2-tasdiq (boshlash sxemasida iteratsiyalar soni). U^* — sistemaning yechimi, J matritsa U^* atrofidagi $B_r(U^*)$ sharda Lipshits shartini qanoatlantirsin va J^{-1} chegaralangan bo‘lsin. U holda shunday $C > 0$ mavjudki, $\| U^{(0)} - U^* \| = e_0 < \min(r, 1/C)$ da Nyuton usuli U^* ga yaqinlashadi va

Demak $e_k \leq \tau$ aniqlikka erishish uchun

iteratsiya yetarli.

Isbot. Lipshits sharti va J^{-1} chegaralanganligidan Nyuton usulining standart bahosi $e_{k+1} \leq Ce_k^2$ kelib chiqadi [2]. Uni $q_k = Ce_k$ uchun yozsak, $q_{k+1} \leq q_k^2$, bundan induksiya bo‘yicha $q_k \leq q_0^{2^k}$. $q_0 < 1$ bo‘lgani uchun ketma-ketlik nolga intiladi. $q_0^{2^k} \leq C\tau$ tengsizlikni logarifmlab, $0 < q_0 < 1$ ekanini hisobga olsak, ko‘rsatilgan baho hosil bo‘ladi. ▫

Tasdiq ikki narsani ko‘rsatadi. Birinchidan, e_0 kamaysa, iteratsiyalar soni $\log_2 |\ln e_0|$ tezlikda kamayadi. Ikkinchidan, Nyuton usuli boshlang‘ich nuqta qaysi yechimning tortilish sohasida yotsa, o‘sha yechimga yaqinlashadi. Bratu masalasida $U^{(0)} = 0$ quyi tarmoq yechimiga yaqin, shuning uchun yuqori tarmoqqa faqat uning tortilish sohasiga tushadigan boshlang‘ich yaqinlashish orqali erishish mumkin.

Barcha hisoblashlar Python 3.12 da NumPy, SciPy va scikit-learn kutubxonalari yordamida bajarildi [14].

NATIJALAR

Bratu masalasi: Nyuton usulini tarmoq yordamida boshlash

1-jadvalda nol boshlang‘ich yaqinlashish va tarmoq bergan boshlang‘ich yaqinlashish bilan Nyuton usuli natijalari keltirilgan. O‘qitish to‘plamiga kirmagan λ qiymatlari sinaldi.

1-jadval. Bratu masalasi uchun Nyuton iteratsiyalari soni ($N = 200$, $\tau = 10^{-10}$)

λ	Tarmoq	$U^{(0)} = 0$: iteratsiyalar	Tarmoq: e_0	Tarmoq: iteratsiyalar	Aniq yechimdan farq	max$u$
0,5	quyi	4	$1{,}25\cdot10^{-2}$	3	$7{,}52\cdot10^{-8}$	0,066
1,0	quyi	4	$1{,}59\cdot10^{-2}$	3	$3{,}56\cdot10^{-7}$	0,141
2,0	quyi	5	$2{,}22\cdot10^{-2}$	3	$2{,}23\cdot10^{-6}$	0,329
3,0	quyi	5	$4{,}18\cdot10^{-2}$	4	$1{,}18\cdot10^{-5}$	0,640
3,4	quyi	7	$3{,}89\cdot10^{-2}$	4	$4{,}25\cdot10^{-5}$	0,909
0,5	yuqori	–*	$2{,}82\cdot10^{-2}$	4	$1{,}01\cdot10^{-4}$	5,136
1,0	yuqori	–*	$2{,}51\cdot10^{-2}$	4	$6{,}80\cdot10^{-5}$	4,091
2,0	yuqori	–*	$2{,}13\cdot10^{-2}$	4	$4{,}34\cdot10^{-5}$	2,896
3,0	yuqori	–*	$2{,}01\cdot10^{-2}$	4	$4{,}53\cdot10^{-5}$	1,975
3,4	yuqori	–*	$3{,}79\cdot10^{-2}$	5	$7{,}85\cdot10^{-5}$	1,515

* Nol boshlang‘ich yaqinlashishda Nyuton usuli quyi tarmoq yechimiga yaqinlashdi.

Quyi tarmoqda iteratsiyalar soni 4–7 tadan 3–4 tagacha kamaydi; eng katta tejash kritik nuqtaga yaqin $\lambda = 3{,}4$ da kuzatildi (7 dan 4 ga). Yuqori tarmoq yechimi nol boshlang‘ich yaqinlashishda umuman topilmadi: Nyuton usuli har safar quyi tarmoqqa yaqinlashdi. Tarmoq bergan boshlang‘ich yaqinlashish esa 4–5 iteratsiyada yuqori tarmoq yechimini berdi. Oxirgi ustundagi farq tarmoqqa emas, balki $O(h^2)$ tartibli diskretlashtirish xatoligiga tegishli: yakuniy aniqlikni klassik sxema belgilaydi.

Konveksiya-diffuziya masalasi: siyrak to‘r yechimini tuzatish

2-jadvalda $N_c = 20$ to‘rdagi markaziy sxema yechimi, tarmoq bilan tuzatilgan yechim va xuddi shunday aniqlikka erishish uchun oddiy sxemaga kerak bo‘ladigan to‘r tugunlari soni (40, 80, 160, … ketma-ketligidan eng kichigi) taqqoslangan. Tarmoqni o‘qitish 3,1 soniya davom etdi.

2-jadval. Siyrak to‘r yechimini tarmoq bilan tuzatish natijalari ($N_c = 20$)

ε	Pe	Siyrak to‘r xatoligi	Gibrid xatolik	Kamayish, marta	Teng aniqlik uchun N
0,020	1,25	$1{,}93\cdot10^{-1}$	$1{,}73\cdot10^{-4}$	1116	1280
0,030	0,83	$9{,}80\cdot10^{-2}$	$1{,}28\cdot10^{-4}$	768	640
0,050	0,50	$3{,}45\cdot10^{-2}$	$1{,}76\cdot10^{-4}$	196	320
0,080	0,31	$1{,}21\cdot10^{-2}$	$1{,}37\cdot10^{-4}$	89	320
0,120	0,21	$5{,}33\cdot10^{-3}$	$1{,}45\cdot10^{-4}$	37	160
0,200	0,12	$1{,}83\cdot10^{-3}$	$1{,}86\cdot10^{-4}$	10	80
0,010*	2,50	$4{,}35\cdot10^{-1}$	$2{,}48\cdot10^{-2}$	18	160
0,400*	0,06	$3{,}36\cdot10^{-4}$	$5{,}84\cdot10^{-3}$	0,06	40

* O‘qitish oralig‘idan tashqaridagi qiymatlar (ekstrapolyatsiya).

O‘qitish oralig‘ida gibrid xatolik ε ga deyarli bog‘liq bo‘lmay, $(1{,}3–1{,}9)\cdot 10^{-4}$ atrofida qoldi. Bu 1-tasdiqqa mos: aniqlik to‘r qadami bilan emas, tarmoqning o‘rganish xatoligi bilan belgilanadi. Chegaraviy qatlam eng yupqa bo‘lgan $\varepsilon = 0{,}02$ da ($\mathrm{Pe} > 1$, sxema monotonlikni yo‘qotgan) 20 tugunli gibrid yechim 1280 tugunli oddiy sxema aniqligiga yetdi. Oraliqdan tashqarida natija keskin yomonlashdi: $\varepsilon = 0{,}01$ da xatolik $2{,}48\cdot 10^{-2}$ gacha o‘sdi, $\varepsilon = 0{,}4$ da esa tuzatish yechimni aksincha buzdi.

Qo‘shimcha tajribada tarmoq kirishiga asimptotik tahlildan olingan $e^{(x-1)/\varepsilon}$ chegaraviy qatlam belgisi qo‘shildi. Bu o‘qitish oralig‘ida aniqlikni sezilarli oshirmadi (xatolik $1{,}4\cdot 10^{-4}$ dan $4{,}5\cdot 10^{-4}$ gacha), shuning uchun asosiy natijalar sodda kirish to‘plami bilan keltirildi.

MUHOKAMA

Ikkala tajriba ham integratsiyaning muhim xususiyatini tasdiqlaydi: tarmoq sonli usulning bitta bosqichiga joylashtirilganda klassik usulning kafolatlari saqlanib qoladi. Boshlash sxemasida tarmoq xatosi yakuniy natijaga ta’sir qilmaydi — u faqat iteratsiyalar sonini va qaysi yechim topilishini belgilaydi. 2-tasdiqqa ko‘ra e_0 ning kamayishi iteratsiyalar sonini logarifmning logarifmi tezligida kamaytiradi, shuning uchun bir o‘lchovli masalada tejash kamtarona (bir-uch iteratsiya). Lekin har bir Nyuton qadamida katta sistema yechiladigan ko‘p

o‘lchovli masalalarda va parametr ko‘p marta o‘zgartiriladigan hollarda (optimallashtirish, noaniqlikni baholash, real vaqtdagi raqamli egizak) bu tejash sezilarli bo‘ladi [11].

Bratu masalasidagi eng muhim natija — yuqori tarmoq yechimini topish. Klassik yondashuvda buning uchun parametr bo‘yicha davom ettirish yoki yoy uzunligi bo‘yicha davom ettirish usuli talab qilinadi. Tarmoq yechimlar oilasini o‘rganib, istalgan tarmoqning tortilish sohasiga bevosita nuqta beradi. Bu ko‘p yechimli nochiziqli modellar — bifurkatsiya va dinamik sistemalar tadqiqi uchun amaliy ahamiyatga ega.

Tuzatish sxemasi kuchliroq samara berdi, ammo uning ishonchliligi pastroq. 1-tasdiq xatolikni faqat o‘qitish to‘plami qamragan parametrlar sohasida kafolatlaydi; jadvaldagi ekstrapolyatsiya natijalari buni yaqqol ko‘rsatadi. Amaliyotda bu sxemani ishlatishda parametrlarning qo‘llanish sohasini aniq belgilash va undan chiqilganda klassik mayda to‘rli hisobga qaytish mexanizmini ko‘zda tutish zarur. Bu kuzatish adabiyotdagi natijalarga mos keladi: siyrak to‘r tuzatishlari o‘qitish taqsimotidan tashqarida aniqligini yo‘qotadi [9, 10].

Olingan natijalar sof neyron tarmoqli usullar (PINN, neyron operatorlar) bilan raqobatlashmaydi, balki ularni to‘ldiradi. PINN da tarmoq yechimning o‘zi, shuning uchun xatolik tarmoq sifati bilan cheklanadi [3, 4]. Bu ishdagi sxemalarda esa tarmoq xato qilsa ham, klassik usul uni tuzatadi (boshlash) yoki xatolik nazorat qilinadigan sohada qoladi (tuzatish). Gidravlik modellashtirishda, masalan Sen-Venan tenglamalari asosidagi daryo oqimi modellarida, tuzatish sxemasi siyrak to‘rda tezkor bashorat berishi, boshlash sxemasi esa yarim oshkor sxemalarning har bir qadamidagi nochiziqli sistemani tezlashtirishi mumkin; bu yo‘nalish keyingi tadqiqot mavzusidir.

Tadqiqotning cheklovlari: model masalalar bir o‘lchovli va aniq yechimi ma’lum; ko‘p o‘lchovli masalalarda tarmoqni o‘qitish uchun mayda to‘rdagi hisoblar talab qilinadi va bu xarajat yechimlar soni ko‘p bo‘lgandagina o‘zini oqlaydi.

XULOSA

Sun’iy intellekt va sonli usullarning integratsiyasi uchun tarmoqni sonli algoritmning aniq bir bosqichiga joylashtiruvchi ikki sxema — boshlash va tuzatish sxemalari ta’riflandi.

Tuzatish sxemasining xatoligi to‘r qadamiga bog‘liq emasligi va tarmoqning o‘rganish xatoligi bilan cheklanishi (1-tasdiq), boshlash sxemasida esa iteratsiyalar soni $\log_2\left(\ln(C\tau)/\ln(Ce_0)\right)$ bilan baholanishi (2-tasdiq) analitik isbotlandi.

Bratu masalasida tarmoq bergan boshlang‘ich yaqinlashish Nyuton iteratsiyalarini 7 tadan 4 tagacha kamaytirdi va nol boshlang‘ich yaqinlashishda topilmaydigan yuqori tarmoq yechimini 4–5 iteratsiyada berdi.

Konveksiya-diffuziya masalasida 20 tugunli to‘rdagi tuzatilgan yechim xatoligini 10–1116 marta kamaytirdi va 80–1280 tugunli oddiy sxema aniqligiga yetdi; o‘qitish oralig‘idan tashqarida esa aniqlik keskin pasaydi.

Integratsiyalashgan yondashuv sonli usul kafolatlarini saqlagan holda hisoblash xarajatini kamaytiradi, ammo uni qo‘llashda parametrlar sohasini nazorat qilish shart.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
2. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. — Philadelphia: SIAM, 2000. — 572 p.
3. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. — 2019. — Vol. 378. — P. 686–707.
4. Karniadakis G.E., Kevrekidis I.G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L. Physics-informed machine learning // Nature Reviews Physics. — 2021. — Vol. 3. — P. 422–440.

5. Lu L., Jin P., Pang G., Zhang Z., Karniadakis G.E. Learning nonlinear operators via DeepONet based on the universal approximation theorem of operators // Nature Machine Intelligence. — 2021. — Vol. 3. — P. 218–229.
6. Li Z., Kovachki N., Azizzadenesheli K., Liu B., Bhattacharya K., Stuart A., Anandkumar A. Fourier neural operator for parametric partial differential equations // International Conference on Learning Representations (ICLR). — 2021.
7. Brunton S.L., Proctor J.L., Kutz J.N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2016. — Vol. 113, No. 15. — P. 3932–3937.
8. Bar-Sinai Y., Hoyer S., Hickey J., Brenner M.P. Learning data-driven discretizations for partial differential equations // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2019. — Vol. 116, No. 31. — P. 15344–15349.
9. Kochkov D., Smith J.A., Alieva A., Wang Q., Brenner M.P., Hoyer S. Machine learning–accelerated computational fluid dynamics // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2021. — Vol. 118, No. 21. — e2101784118.
10. Um K., Brand R., Fei Y., Holl P., Thuerey N. Solver-in-the-loop: Learning from differentiable physics to interact with iterative PDE-solvers // Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS). — 2020. — Vol. 33. — P. 6111–6122.
11. Huang J., Wang H., Yang H. Int-Deep: A deep learning initialized iterative method for nonlinear problems // Journal of Computational Physics. — 2020. — Vol. 419. — 109675.
12. Evensen G. Data Assimilation: The Ensemble Kalman Filter. 2nd ed. — Berlin: Springer, 2009. — 307 p.
13. Kingma D.P., Ba J. Adam: A method for stochastic optimization // International Conference on Learning Representations (ICLR). — 2015.

14. Pedregosa F. et al. Scikit-learn: Machine learning in Python // Journal of Machine Learning Research. — 2011. — Vol. 12. — P. 2825–2830.
15. Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function // Mathematics of Control, Signals and Systems. — 1989. — Vol. 2, No. 4. — P. 303–314.