НОВАЯ ЭРА НАУКИ И ЗНАНИЙ
МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
global-science-review.com
editor@global-science-review.com

О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ТЕЛА С ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА

Рамазонов Жасуржон Рахим угли
Магистр НГУ

Аннотация. В курсовой работе проводится анализ задач равновесия упругой пластины со свободным краем, содержащей тонкое упругое включение. Жёсткий элемент может частично отслаиваться от пластины, что приводит к формированию межфазной трещины. Рассматриваемые граничные условия являются некоэрцитивными, что усложняет исследование существования решений. Для всех указанных постановок исследованы условия существования решения соответствующих краевых задач.

Ключевые слова: Тонкое упругое включение, отслоение, некоэрцитивная краевая задача.

В механике твёрдого деформируемого тела важное место занимают задачи о равновесии упругих тел, содержащих тонкие включения. Такие включения моделируют армирующие элементы в композитах, расслоения, трещины и другие дефекты. Классические линейные модели часто допускают физически нереальную взаимную проницаемость поверхностей включений. Поэтому актуальны нелинейные модели с условиями непроницаемости в форме неравенств. Особую математическую сложность представляет случай, когда на внешней границе тела заданы не условия Дирихле, а условия Неймана. В такой постановке задача становится некоэрцитивной без дополнительных условий функционал энергии может не достигать минимума. Цель данной курсовой работы — исследовать задачу равновесия упругого тела с тонким упругим включением при однородных условиях Неймана на внешней границе. Формулируются дифференциальная и вариационная постановки, доказывается существование решения и получается необходимое и

достаточное условие разрешимости. Осуществляется построение математической модели задачи. С использованием вариационного подхода исследуется существование решения.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Пусть $\Omega \subset R^2$ -ограниченная область с гладкой границей Г. Внутри Ω находится тонкое упругое включение γ=(0,1)×{0}, тонким упругим включением Эйлера–Бернулли. Предполагается, что включение деламинировано от упругого материала, что приводит к образованию трещины между включением и телом. $n = (n_1, n_2)$ Обозначения $n = (n_1, n_2)$ - единичный вектор внешней нормали к Г, $v = (v_1, v_2)$ - единичный вектор нормали к γ, $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (v_2 - v_1)$ единичный касательный вектор к γ,$\Omega_\gamma = \Omega \backslash \gamma$ область с разрезом,

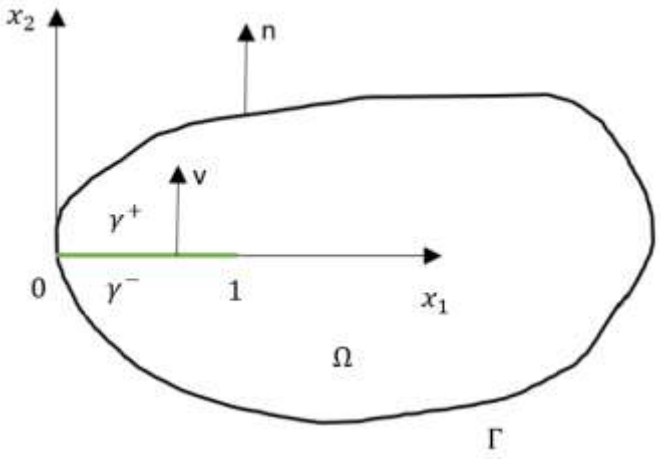


РИСУНОК-1. Упругого тела с тонким включением $\gamma^{\pm}$

2. Дифференциальная постановка

Рассмотрим краевую задачу для упругого тела с однородным условием Неймана на всей внешней границе Г. Часть границы с условиями Дирихле отсутствует ($\Gamma_0 = \emptyset$).В области Ω требуется найти вектор перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{i,j}\}$, $i, j = 1,2,3,$ удовлетворяющие следующей системе

$$-div\sigma = f \text{ в } \Omega \quad (1)$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \text{ в } \Omega \quad (2)$$

$$\sigma n = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (3)$$

$$-v_{,11} = [\sigma_\tau],\ w_{,1111} = [\sigma_v] \text{ на } \gamma \quad (4)$$

$$w_{,11} = w_{,111} = v_{,1} = 0 \text{ при } x_1 = 0{,}1, \quad (5)$$

$$u_\tau^- = v,\ u_v^- = w \text{ на } \gamma \quad (6)$$

$$[u_v] \geq 0,\ \sigma_v^+ \leq 0, \sigma_\tau^+ = 0,\ \sigma_\tau^+ [u_v] = 0 \text{ на } \gamma \quad (7)$$

$$\int_{\Omega_\gamma} u = 0,\ \int_{\Omega_\gamma} (u_{1,2} - u_{2,1}) = 0 \quad (8)$$

Здесь $f = (f_1, f_2) \in L_2(\Omega)^2$ это вектор заданных объёмных сил, $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}$ тензор малых деформаций.

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1{,}2.$$

$A = \{a_{ijkl}\}$- тензор модулей упругости, обладающий свойствами симметрии $a_{ijkl} = a_{klij}$, $a_{klij} = a_{ijkl}$, и положительной определённости:

$a_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0 |\xi|^2 \ \forall \xi_{ij},\ c_0 = const > 0;\ a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), i, j, k, l = 1{,}2$

$\sigma n = (\sigma_{1j} n_j, \sigma_{2j},)$ - вектор поверхностных усилий.

Уравнение (1) выражает закон сохранения импульса (уравнения равновесия), (2) - закон Гука, (3) -однородное условие Неймана (свободная от усилий граница).(4), $[u_v] = [u] \cdot v$ - скачок нормальной компоненты перемещений, $\sigma_v = \sigma_{ij} v_j v_i$ нормальное напряжение на γ; $\sigma_\tau = \sigma v - \sigma_v v$ касательное напряжение. Условие ($[u_v] \geq 0$) означает, что берега трещины не могут проникать друг в друга. Равенство ($[\sigma_v] = 0$) выражает непрерывность нормальных напряжений при переходе через γ . Неравенство $\sigma_v \leq 0$ означает, что на контакте возможны только сжимающие усилия отсутствие растяжения. Условие $\sigma_\tau = 0$ соответствует отсутствию трения между берегами. Равенство $\sigma_v \cdot [u_v] = 0$

является условием дополнительной нежёсткости, в точках, где берега не соприкасаются $([u_\nu]>0)$ нормальные напряжения равны нулю, в точках контакта $([u_\nu]=0)$ напряжения могут быть ненулевыми. (6)- Условия единственности решения чтобы обеспечить единственность решения при условиях Неймана на всей границе Г. При однородном условии Неймана $\sigma n=0$ на Г функционал энергии не меняется при добавлении к решению любого жёсткого перемещения. Без этих условий решение было бы определено с точностью до жёсткого перемещения, то есть существовало бы бесконечно много решений. Данные условия фиксируют решение и делают его единственным.

3. Вариационная постановка

Введём функциональные пространства.

Пространство *V*:

$$V=\left\{(u,v,w)\in H^1(\Omega_\gamma)^2\times H^1(\gamma)\times H^2(\gamma)\,\middle|\, u_\tau^-=v, u_\nu^-=w\ на\ \gamma\right\} \qquad (9)$$

и подпространство $V_1\subset V$

$$V_1=\{(u,v,w,)\in V\ \Big|\ \int_{\Omega_\gamma} u=0, \int_{\Omega_\gamma}(u_{1,2}-u_{2,1})=0, u=(u_1,u_2)\},$$

Здесь $H^1(\Omega_\gamma)^2$ -пространство Соболева вектор-функций с квадратично интегрируемыми первыми производными. $H^1(\Omega_\gamma)^2, H^i(\gamma), i=1,2,$ - пространства Соболева на кривой γ.

Функционал энергии П:$V\to$R

$$\prod(u,v,w)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\gamma}\sigma(u)\varepsilon(u)-\int_{\Omega_\gamma} fu+\frac{1}{2}\int_\gamma v_{,1}^2+\frac{1}{2}\int_\gamma w_{,11}^2, \qquad (10)$$

Первое слагаемое - энергия деформации упругого тела, второе слагаемое - заданных внешних сил, третье слагаемое - энергия растяжения тонкого включения, четвёртое слагаемое-энергия изгиба тонкого включения.

Множество допустимых перемещений $P\subset V$:

$$P = \{(u,v,w) \in V \mid [u_v] \geq 0 \text{ на } \gamma\} \qquad (11)$$

P - выпуклое замкнутое множество.

Вариационная задача найти

$$(u,v,w) \in P \qquad (12)$$

тогда формулируется задача минимизации

$$\Pi(u,v,w) = \inf_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w}) \in V_1} \Pi(\bar{u},\bar{v},\bar{w}). \qquad (13)$$

Существует решение (u, v, w) данной задачи, удовлетворяющее вариационному неравенству.

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u) + \int_{\gamma} \upsilon_{,1}(\bar{\upsilon}_{,1}-\upsilon_{,1}) + \int_{\gamma} w_{,11}(\bar{w}_{,11}-w_{,11}) \geq 0 \quad \forall(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w}) \in P \cap V_1. \quad (14)$$

Заключение

В данной курсовой работе выполнено следующее. Построена математическая модель равновесия упругого тела с тонким упругим соединением при условии равномерности Неймана на внешней границе. Построены дифференциальные формулы (1)-(8) и вариационные формулы (12)-(14), рассмотрены их гладкие решения. Рассмотрено существование решения вариационного неравенства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хлуднев А. Задачи теории упругости в негладких областях. — М. : Физматлит, 2010. — 252 с.
2. Хлуднев А. О равновесии пластины с тонким жестким включением и свободным краем // Математические заметки СВФУ. — 2021. — Т. 28, № 3. — С. 105—120.
3. Хлуднев А., Попова Т. Об иерархии тонких включений в упругих телах // Математические заметки СВФУ. — 2016. — Т. 23, № 1. — С. 87—107.