НОВАЯ ЭРА НАУКИ И ЗНАНИЙ
МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
global-science-review.com
editor@global-science-review.com

CHEGARALANMAGAN VA YARIM CHEGARALANGAN SOHALARDA BERILGAN TOR TEBRANISH TENGLAMALARI UCHUN QO‘YILGAN MASALALARNING GEOMETRIK TALQINI

Buxoro Xalqaro Osyo Universiteti Ijtimoiy fanlar va texnika fakulteti talabasi

Xayriyeva Dilora Zaripovna

Annotatsiya

Mazkur maqolada chegaralanmagan va yarim chegaralangan sohalarda tor tebranish jarayonini ifodalovchi ikkinchi tartibli giperbolik tenglama uchun qo‘yiladigan masalalarning geometrik talqini o‘rganilgan. Tor tebranishining matematik modeli, boshlang‘ich va chegaraviy shartlarning mazmuni hamda ularning fazo-vaqt tekisligidagi ifodasi tahlil qilingan. Xarakteristikalar yordamida tebranishning tarqalish yo‘nalishi, chekli ta’sir tezligi va yechimning ma’lum bir nuqtadagi qiymatiga ta’sir etuvchi boshlang‘ich ma’lumotlar sohasi aniqlangan. Yarim chegaralangan sohada chegaraning mavjudligi to‘lqinlarning qaytishi va aks etishiga sabab bo‘lishi geometrik jihatdan izohlangan. Dirixle va Neyman tipidagi chegaraviy shartlarning fizik mazmuni hamda ularni juft va toq davom ettirish orqali ifodalash imkoniyatlari ko‘rib chiqilgan. Tadqiqot natijalari tor tebranish tenglamalarini geometrik nuqtayi nazardan o‘rganish masalaning fizik mohiyatini, yechimning shakllanish mexanizmini va chegaraning ta’sirini yaxshiroq tushunishga xizmat qilishini ko‘rsatadi.

Kalit so‘zlar: tor tebranishi, to‘lqin tenglamasi, giperbolik tenglama, chegaralanmagan soha, yarim chegaralangan soha, Koshi masalasi, chegaraviy masala, xarakteristika, ta’sir sohasi, to‘lqin tarqalishi.

KIRISH

Matematik fizikaning muhim vazifalaridan biri real fizik jarayonlarni matematik modellar yordamida ifodalash va ular uchun qo‘yilgan masalalarni tadqiq etishdan iborat. Tebranish va to‘lqin jarayonlari bunday modellashtirishning eng

ko‘p uchraydigan obyektlaridan hisoblanadi. Elastik torning ko‘ndalang tebranishi esa giperbolik tipdagi differensial tenglamalarning xususiyatlarini o‘rganish uchun klassik va qulay model sifatida qaraladi.

Tor tebranishining sodda matematik modeli

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$

tenglama orqali ifodalanadi. Bu yerda u(x,t) torning x nuqtasidagi t vaqt momentidagi ko‘ndalang siljishini, a esa tebranishning tarqalish tezligini bildiradi.

Mazkur tenglama ko‘rinishidan sodda bo‘lsa-da, uning uchun qo‘yilgan masalaning mohiyati sohaning geometrik tuzilishiga bevosita bog‘liq. Agar tor chekli kesmada joylashgan bo‘lsa, uning ikkala uchida chegaraviy shart beriladi. Agar tor bir tomonga cheksiz davom etsa, ya’ni yarim chegaralangan sohada qaralsa, faqat bitta fizik chegara mavjud bo‘ladi. Chegaralanmagan holda esa tor ikkala tomonga cheksiz davom etadi va alohida chegaraviy shart talab qilinmaydi.

Shu jihatdan bir xil differensial tenglama turli sohalarda turlicha matematik masalalarni yuzaga keltiradi. Ayniqsa, giperbolik tenglamalarda yechimning tarqalish xarakteri geometrik yondashuv orqali juda aniq ko‘rinadi. Xarakteristikalar tebranishning qaysi yo‘nalishda harakatlanishini, boshlang‘ich ma’lumotning qaysi nuqtalarga ta’sir qilishini va chegaraning yechimga qanday ta’sir ko‘rsatishini aniqlash imkonini beradi.

Ushbu maqolaning maqsadi chegaralanmagan va yarim chegaralangan sohalarda tor tebranish tenglamasi uchun qo‘yilgan masalalarni geometrik nuqtayi nazardan tahlil qilishdan iborat.

Tadqiqot doirasida tor tebranish tenglamasining geometrik xususiyatlari, xarakteristikalar, ta’sir sohasi, chegaraviy shartlarning fizik mazmuni va to‘lqinlarning chegaradan qaytishi o‘rganiladi.

MATERIAL VA METODLAR

Tadqiqotning asosiy matematik modeli sifatida

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

to‘lqin tenglamasi olindi. Bu tenglama ikkinchi tartibli giperbolik differensial tenglama hisoblanadi.

Tadqiqotda fazo-vaqt koordinatalari x va t dan foydalaniladi. x koordinata tor bo‘ylab fazoviy joylashuvni, t esa vaqtni ifodalaydi. Shunday qilib, torning istalgan nuqtasidagi holat u(x,t) funksiya orqali aniqlanadi.

Chegaralanmagan sohada

$-\infty < x < +\infty,\ t > 0$

shartlari olinadi. Bunda boshlang‘ich ma’lumotlar

$u(x,0) = \varphi(x),$

$u_t(x,0) = \psi(x)$

ko‘rinishda beriladi.

Yarim chegaralangan sohada esa

$x > 0,\ t > 0$

deb olinib, boshlang‘ich shartlarga qo‘shimcha ravishda $x = 0$ chegarada ma’lum shart beriladi.

Masalani geometrik o‘rganishda xarakteristikalar usulidan foydalanildi. Tenglama uchun xarakteristik yo‘nalishlar

$dx = \pm a\,dt$

munosabatdan aniqlanadi. Integrallash natijasida

$x - at = C_1,$

$x + at = C_2$

to‘g‘ri chiziqlar hosil bo‘ladi.

Ushbu xarakteristikalar tebranishning ikkita asosiy tarqalish yo‘nalishini ifodalaydi. Tadqiqotda, shuningdek, D'Alembert formulasi, juft va toq davom ettirish usullari hamda chegaradagi aks etish hodisasining geometrik mazmunidan foydalanildi.

NATIJALAR

1. Chegaralanmagan sohadagi Koshi masalasining geometrik talqini

Chegaralanmagan sohada tor

$-\infty < x < +\infty$

oraliqda qaraladi. Bu modelda torning fizik uchlari mavjud emas deb faraz qilinadi.

Boshlang‘ich holat va tezlik ma’lum:

$u(x,0) = \varphi(x)$,

$u_t(x,0) = \psi(x)$.

Mazkur shartlar $t = 0$ boshlang‘ich chizig‘ida beriladi. Fazo-vaqt tekisligida har bir (x,t) nuqta torning ma’lum bir nuqtasi va ma’lum vaqtga mos keladi.

Tenglamaning xarakteristikalari

$x - at = C_1$,

$x + at = C_2$

ko‘rinishda bo‘ladi. Demak, boshlang‘ich chiziqning har bir nuqtasidan ikkita xarakteristik yo‘nalish tarqaladi.

Masalan, $x = x_0$ nuqtadagi boshlang‘ich buzilishdan ikkita to‘lqin qarama-qarshi tomonga harakatlanadi. Ularning tenglamalari

$x = x_0 + at$

va

$x = x_0 - at$

ko‘rinishga ega.

Bu natija tor tebranishining fizik mohiyatiga mos keladi: torning bir qismidagi buzilish butun tor bo‘ylab birdaniga emas, balki ma’lum tezlik bilan tarqaladi.

Chegaralanmagan sohadagi Koshi masalasining yechimi D'Alembert formulasi orqali

$u(x,t) = [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]/2 + 1/(2a) \int_{[x-at,\, x+at]} \psi(s)\, ds$

ko‘rinishda yoziladi.

Formuladan ko‘rinadiki, (x,t) nuqtadagi yechimni aniqlash uchun boshlang‘ich funksiyaning butun x o‘qidagi qiymatlarini bilish shart emas. Faqat

$[x - at, x + at]$

kesmadagi qiymatlar yetarli.

Bu hodisa chekli ta’sir prinsipi deb qaraladi.

Geometrik jihatdan (x,t) nuqtadan orqaga qarab o‘tkazilgan ikkita xarakteristika $t = 0$ boshlang‘ich chizig‘ini

$x - at$

va

$x + at$

nuqtalarda kesadi. Ana shu ikki nuqta orasidagi boshlang‘ich ma’lumotlar keyingi holatning shakllanishida ishtirok etadi.

Shunday qilib, giperbolik tenglama yechimining lokal xususiyati uning geometrik tuzilishida yaqqol namoyon bo‘ladi.

1. Tebranishning chekli tezlikda tarqalishi

To‘lqin tenglamasining muhim xususiyatlaridan biri ta’sirning chekli tezlik bilan tarqalishidir. Agar boshlang‘ich buzilish faqat

$[x_1, x_2]$

kesmada joylashgan bo‘lsa, vaqt o‘tishi bilan uning ta’sir sohasi kengayadi.

t vaqt momentida ta’sir sohasi

$[x_1 - at, x_2 + at]$

interval bilan chegaralanadi.

Demak, boshlang‘ich buzilishning chap chegarasi a tezlik bilan chapga, o‘ng chegarasi esa a tezlik bilan o‘ngga siljiydi.

Bu jarayonni x,t tekisligida xarakteristikalar yordamida tasvirlash mumkin. Boshlang‘ich intervalning uchlaridan chiqadigan xarakteristikalar ta’sir sohasining chegaralarini hosil qiladi.

Mazkur geometrik talqin fizik jarayon uchun ham katta ahamiyatga ega. Masalan, torning faqat bir qismi tashqi ta’sir natijasida siljitilgan bo‘lsa, uning ta’siri

ma’lum vaqt davomida torning boshqa qismlariga hali yetib bormagan bo‘lishi mumkin.

Shunday qilib, matematik model fizik tizimdagi signal yoki tebranishning ma’lum tezlik bilan tarqalishini aks ettiradi.

1. Yarim chegaralangan sohada masalaning geometrik tuzilishi

Endi tor

$0 \le x < +\infty$

yarim o‘qida joylashgan deb qaraymiz.

Bunday holda torning $x = 0$ nuqtada bitta uchi mavjud. Ikkinchi tomoni esa cheksiz davom etadi.

Masalaning boshlang‘ich shartlari

$u(x,0) = \varphi(x)$,

$u_t(x,0) = \psi(x)$

va chegaraviy sharti

$u(0,t) = 0$

bo‘lsin.

Geometrik jihatdan x,t tekisligidagi soha $t = 0$ gorizontal chiziq va $x = 0$ vertikal chiziq bilan chegaralanadi.

Bu holatda (x,t) nuqtadan orqaga qarab xarakteristikalar o‘tkazilganda, ularning biri yoki ikkalasi boshlang‘ich chiziqqa yetib borishi, ayrim hollarda esa chegaraga borib taqalishi mumkin.

Demak, yechimning shakllanishida boshlang‘ich ma’lumotlar bilan bir qatorda chegara haqidagi ma’lumot ham ishtirok etadi.

Bu yarim chegaralangan masalani chegaralanmagan Koshi masalasidan asosiy farqlovchi jihatlardan biridir.

1. Mahkamlangan uch va to‘lqinning aks etishi

Yarim chegaralangan torning uchida

$u(0,t) = 0$

shart berilgan bo‘lsin.

Bu shart torning x = 0 nuqtasi vaqt davomida harakat qilmasligini bildiradi. Fizik nuqtayi nazardan bunday uch mahkamlangan uch deb qaraladi.

To‘lqin chegaraga yetib kelganda, u qaytadi. Mahkamlangan uchdan qaytishda to‘lqinning ishorasi o‘zgaradi. Ushbu hodisani matematik jihatdan toq davom ettirish orqali ifodalash mumkin.

Boshlang‘ich funksiya x > 0 sohada berilgan bo‘lsa, uni x < 0 sohaga

$\varphi(-x) = -\varphi(x)$

munosabat asosida toq davom ettirish mumkin.

Xuddi shuningdek, boshlang‘ich tezlik funksiyasi ham toq davom ettiriladi.

Natijada yarim chegaralangan sohadagi masala butun o‘qda berilgan Koshi masalasiga aylantiriladi.

Geometrik jihatdan esa x = 0 chegara go‘yoki to‘lqin uchun aks ettiruvchi chiziq vazifasini bajaradi.

1. Erkin uch uchun geometrik talqin

Endi chegarada

$u_x(0,t) = 0$

shart berilgan holatni qaraymiz.

Bu shart tor uchining ko‘ndalang yo‘nalishdagi qiyaligi nolga teng ekanligini bildiradi. Fizik jihatdan uchi erkin bo‘lgan tor modeli bilan bog‘lanadi.

Bunday holatda boshlang‘ich funksiyani x < 0 sohaga juft davom ettirish mumkin:

$\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Natijada chegara orqali o‘tuvchi yechimning geometrik simmetriyasi yuzaga keladi.

Mahkamlangan va erkin uchni taqqoslaganda, birinchi holatda to‘lqin qaytishda ishorasini o‘zgartiradi, ikkinchi holatda esa asosiy siljish funksiyasining ishorasi saqlanadi.

Shu sababli chegaraviy shartning turi to‘lqinning aks etish xarakterini belgilaydi.

1. Chegaraning xarakteristikalarga ta’siri

Giperbolik tenglamalarda chegaraning xarakteristikalar bilan munosabati muhim ahamiyatga ega.

To‘lqin tenglamasi uchun xarakteristikalar

$x - at = C_1$,

$x + at = C_2$

ko‘rinishda bo‘lib, ular x,t tekisligida ikki xil yo‘nalishdagi to‘g‘ri chiziqlardan iborat.

Yarim chegaralangan sohada $x = 0$ chegarasi mavjud. To‘lqin ushbu chegaraga yetganda, chegaraviy shartga muvofiq qaytadi.

Agar chegara bo‘lmaganida, to‘lqin o‘z harakatini davom ettirgan bo‘lardi. Chegaraning paydo bo‘lishi esa uning keyingi traektoriyasini o‘zgartiradi.

Bu jihatdan geometrik talqin juda qulay: tenglamaning o‘zi to‘lqin yo‘nalishini belgilasa, chegara uning fazoda qayerda va qanday sharoitda aks etishini belgilaydi.

MUHOKAMA

O‘tkazilgan tahlil natijalari tor tebranish tenglamasi uchun qo‘yilgan masalalarning geometrik tuzilishi ularning matematik yechimi bilan uzviy bog‘liq ekanligini ko‘rsatadi.

Chegaralanmagan sohada torning tebranishi erkin ravishda ikki tomonga tarqaladi. Bunda asosiy rolni xarakteristikalar bajaradi. Boshlang‘ich ma’lumotning biror nuqtadagi qiymati ma’lum vaqt o‘tgach torning qaysi qismiga ta’sir qilishini xarakteristikalar yordamida oldindan aniqlash mumkin.

D'Alembert formulasining geometrik mazmuni ham aynan shunda namoyon bo‘ladi. Undagi $x - at$ va $x + at$ argumentlar ikki qarama-qarshi yo‘nalishda

tarqaluvchi to‘lqinlarni bildiradi. Demak, analitik formula fizik jarayonning geometrik tasvirini o‘zida mujassamlashtiradi.

Yarim chegaralangan sohada esa vaziyat murakkabroq. Chunki to‘lqin faqat boshlang‘ich ma’lumotlardan emas, balki chegaradagi shartdan ham ta’sirlanadi. Torning uchi mahkamlangan yoki erkin bo‘lishiga qarab qaytgan to‘lqinning xususiyati o‘zgaradi.

Mahkamlangan uchda

$u(0,t) = 0$

sharti bajarilishi sababli to‘lqin qaytishda ishorasini almashtiradi. Erkin uchda esa

$u_x(0,t) = 0$

sharti mavjud bo‘lib, qaytish jarayoni boshqa simmetriyaga ega bo‘ladi.

Ushbu hodisalarni juft va toq davom ettirish usullari yordamida ifodalash mumkin. Shu sababli davom ettirish usuli nafaqat hisoblashni soddalashtiradi, balki chegaradagi fizik jarayonning geometrik mohiyatini ham ochib beradi.

Masalaning korrekt qo‘yilishi nuqtayi nazaridan ham geometrik yondashuv muhimdir. Boshlang‘ich ma’lumot beriladigan chiziq va chegaraning xarakteristikalar bilan munosabati yechimning aniqlanishiga ta’sir ko‘rsatadi. Xarakteristikalar orqali ma’lumotning qayerdan kelishi va qaysi yo‘nalishda tarqalishini ko‘rish mumkin.

Tor tebranish tenglamasining yana bir muhim xususiyati energiyaning tarqalishidir. Ideal sharoitlarda energiya tor bo‘ylab saqlanadi va to‘lqinlar orqali bir qismdan boshqa qismga uzatiladi. Chegaralanmagan sohada energiya ikki tomonga tarqalishi mumkin. Yarim chegaralangan sohada esa energiyaning chegaradan qaytishi natijasida qarama-qarshi yo‘nalishdagi to‘lqinlar o‘zaro ta’sirlashadi.

Natijada interferensiya va turg‘un to‘lqinlarga o‘xshash hodisalar yuzaga kelishi mumkin. Bu jarayonlarning barchasi tor tebranish tenglamasining geometrik talqini bilan bevosita bog‘liq.

Tadqiqotning amaliy ahamiyati shundaki, bunday geometrik yondashuv murakkabroq giperbolik tenglamalarni o‘rganishga ham asos bo‘la oladi. Tashqi kuch mavjud bo‘lgan

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$

tenglama uchun ham ta’sir sohasi va xarakteristikalar muhim ahamiyatini saqlab qoladi. Faqat bu holda tebranishga tashqi manbaning ta’siri ham qo‘shiladi.

Shu bilan birga, real torlar ideal matematik modeldan farq qiladi. Ularda qarshilik, tashqi kuch, o‘zgaruvchan taranglik va boshqa omillar mavjud bo‘lishi mumkin. Biroq asosiy geometrik g‘oya, ya’ni tebranishning ma’lum tezlik bilan tarqalishi va chegaralarning uning harakatiga ta’sir qilishi o‘z ahamiyatini saqlab qoladi.

XULOSA

Chegaralanmagan va yarim chegaralangan sohalarda berilgan tor tebranish tenglamalari uchun qo‘yilgan masalalarning geometrik talqini o‘rganilishi natijasida quyidagi xulosalarga kelindi.

Birinchidan, tor tebranish tenglamasi giperbolik tipdagi differensial tenglama bo‘lib, uning yechimining asosiy geometrik xususiyatlari xarakteristikalar orqali ifodalanadi. Xarakteristikalar tebranishning ikki asosiy tarqalish yo‘nalishini belgilaydi.

Ikkinchidan, chegaralanmagan sohada yechimning ma’lum bir nuqtadagi qiymati butun boshlang‘ich ma’lumotlarga emas, balki uning ta’sir sohasiga kiruvchi qismiga bog‘liq. Bu giperbolik tenglamalarga xos chekli ta’sir prinsipining matematik ifodasidir.

Uchinchidan, yarim chegaralangan sohada bitta fizik chegaraning mavjudligi to‘lqinlarning tarqalish xarakterini o‘zgartiradi. Chegaraga yetib kelgan to‘lqin undan qaytadi va qaytish xususiyati berilgan chegaraviy shartga bog‘liq bo‘ladi.

To‘rtinchidan, mahkamlangan uch uchun u(0,t) = 0, erkin uch uchun esa u_x(0,t) = 0 shartlarining geometrik va fizik mazmuni mavjud. Birinchi holatda toq, ikkinchi holatda juft davom ettirishdan foydalanish mumkin.

Beshinchidan, geometrik yondashuv masalaning analitik yechimini tushunishni osonlashtiradi. Ayniqsa, xarakteristikalar yordamida boshlang‘ich ma’lumotlarning yechimga ta’siri, to‘lqinning tarqalish yo‘nalishi va chegaradan qaytish jarayonini yaqqol tasavvur qilish mumkin.

Umuman olganda, tor tebranish tenglamalarini geometrik nuqtayi nazardan tadqiq etish matematik model va real fizik jarayon o‘rtasidagi bog‘liqlikni chuqurroq anglash imkonini beradi. Chegaralanmagan va yarim chegaralangan sohalar uchun qo‘yilgan masalalarni taqqoslash esa chegaraning mavjudligi giperbolik tenglama yechimining xususiyatlariga qanchalik kuchli ta’sir qilishini ko‘rsatadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Evans L. C. Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 2010.
2. Strauss W. A. Partial Differential Equations: An Introduction. John Wiley & Sons, 2008.
3. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations. Wiley-Interscience, 1962.
4. John F. Partial Differential Equations. Springer, 1982.
5. Tijonov A. N., Samarskiy A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. Moskva: Nauka.
6. Ladyzhenskaya O. A. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Springer.
7. Salohiddinov M. S. Matematik fizika tenglamalari. Toshkent.
8. Mamatov J., Abduqodirov A. Differensial tenglamalar va matematik fizika tenglamalari. Toshkent.